

Ю.М. Васецький

Аналітичне визначення квазістаціонарного електромагнітного поля, створеного магнітними моментами і вихровими струмами в електропровідному півпросторі

Мета. Дослідження в умовах прояву сильного скін-ефекту розподілу на поверхні електропровідного півпростору тривимірного змінного квазістаціонарного електромагнітного поля, джерелом зовнішнього поля якого є довільно орієнтований магнітний момент. **Методологія.** Для аналізу використаний аналітичний розв'язок загальної тривимірної задачі для випадку неоднорідного електромагнітного поля при сильному скін-ефекті і використанні розкладання в асимптотичні ряди по малому параметру, який пропорційний відношенню глибини проникнення поля до відстані між джерелами зовнішнього поля і поверхнею тіла. Конкретні вирази на поверхні повністю визначаються відомим полем зовнішніх джерел, в якості яких використовується поле магнітного моменту. **Результати.** Для сильного скін-ефекту отримано вирази для напруженостей електричного і магнітного полів окремо для компонентів магнітного моменту, що орієнтовано перпендикулярно і паралельно до плоскої поверхні між діелектричною і електропровідною областями. Проаналізовано особливості розподілу електромагнітного поля в залежності від величини введеного малого параметру. Результати представлено для модулів і зсуву фаз компонентів напруженостей полів відносно фази джерела зовнішнього поля. **Оригінальність.** Знайдені вирази для електромагнітного поля уявляються більш загальними, ніж використання замкнених контурів зі змінним струмом, оскільки розширюють види джерел зовнішнього поля, що враховуються, і дозволяють використати метод суперпозиції замість інтегрування по всьому контуру. **Практична цінність.** Знайдені конкретні аналітичні вирази електромагнітного поля на поверхні для зовнішнього поля магнітних моментів значно спрощують вирішення конкретних задач, оскільки не потребують для цього додаткового розв'язку рівнянь поля. Бібл. 20, рис. 8.

Ключові слова: тривимірне квазістаціонарне електромагнітне поле, сильний скін-ефект, зовнішнє поле магнітних моментів, асимптотичний метод, аналітичний розв'язок.

Вступ. Взаємодія змінного електромагнітного поля з електропровідними тілами супроводжується проявом скін-ефекту. У високочастотних і швидкоплинних електромагнітних процесах має місце сильний скін-ефект, при якому струм і електромагнітне поле концентруються в тонкому поверхневому шарі тіла. В цьому випадку формулювання математичних моделей для розрахунку електромагнітного поля значно спрощується. Найбільш простою уявляється математична модель ідеального скін-ефекту, коли характерні розміри електропровідного тіла L значно перевищують глибину проникнення поля δ . Тут достатньо розглядати стаціонарну задачу для тіла з ідеальною електропровідністю і відповідно рівною нулю глибиною проникнення поля $\delta \rightarrow 0$ [1, 2]. В цьому випадку нормальна компонента магнітного і дотична компонента електричного полів дорівнюють нулю.

Подальший розвиток наближених моделей проникнення електромагнітного поля в електропровідне середовище при $\delta \neq 0$ пов'язаний, в першу чергу з дослідженням на основі імпедансної граничної умови [3, 4]. У математичній моделі, яку запропонував М. Леонтович ще в середині ХХ ст. [3], вихідною залишалася модель з ідеальною електропровідністю. З цієї моделі визначалася дотична до поверхні електропровідного тіла напруженість магнітного поля. Кінцева глибина проникнення поля враховувалася із застосуванням концепції імпедансної граничної умови, в якій напруженість магнітного поля на поверхні тіла пов'язана з напруженістю електричного поля конкретним співвідношенням. Передбачається, що локально електромагнітне поле проникає в металеве тіло так само, як однорідне поле проникає в електропровідний півпростір. Модель є наближеною і одне з питань полягає у визначенні меж застосування моделі. Докладний аналіз багаторічних досліджень в розвитку концепції імпедансної граничної умови представлений, наприклад, в [5, 6].

Розробка ефективних методів розв'язку тривимірних задач теорії електромагнітного поля в досить загальній постановці є актуальною проблемою, незважаючи на значний прогрес у використанні чисельних методів

розрахунку. Певну привабливість для теоретичного дослідження, як і раніше, мають аналітичні методи розв'язку подібних задач. Це обумовлено їх позитивними сторонами. По-перше, існує широке коло об'єктів, де ефективними залишаються спеціалізовані аналітичні чи комбіновані чисельно-аналітичні підходи. До таких об'єктів відносяться, зокрема, системи, геометричні особливості яких характеризуються різним характером зміни поля в просторі – швидкою зміною поблизу зосереджених джерел поля або поблизу межі поділу середовищ і значно повільнішою в іншій області простору значно більшого об'єму. По-друге, наявність аналітичного рішення дозволяє отримати загальні особливості формування тривимірного поля, які дають змогу проводити глибокий аналіз причин та особливостей фізичних процесів. Також з'являється можливість розробити об'єднані підходи для тривимірного моделювання складних електромагнітних систем. Нарешті, аналітичні рішення поставляють певний набір точно розв'язуваних задач, які можуть бути еталоном порівняння при розробці інших методів до розрахунку систем складнішої геометрії, де отримання аналітичних рішень неможливо.

У книзі [7] представлено отриманий автором і опублікований в окремих статтях точний аналітичний розв'язок для змінного та імпульсного електромагнітного полів, створених системою просторових контурів зі струмом довільної конфігурації, розташованих поблизу електропровідного тіла, що намагнічується, з плоскою поверхнею, в якому індукуються вихрові струми. Рішення з урахуванням замкнутості контурів знайдено у вигляді квадратур для векторного та скалярного потенціалів, напруженостей магнітного та електричного полів у діелектричному та електропровідному середовищах без обмежень на геометрію контурів, властивості середовища та частоту поля. Отриманий розв'язок дозволив, зокрема, встановити такі загальні закономірності формування полів [8]. Компоненти густини струму та напруженості електричного поля, перпендикулярні до поверхні, мають нульове значення у всьому електропровідному пів-

© Ю.М. Васецький

просторі. Результатом є також гранична умова для нормальної компоненти напруженості електричного поля в діелектричному середовищі, яке повністю визначається відомим полем зовнішніх джерел. Інший наслідок точного рішення – висновок про те, що неоднорідне електромагнітне поле при проникненні в електропровідний півпростір загасає з глибиною завжди швидше, ніж однорідне поле.

Спрощення обчислювальних процедур є необхідним і для аналітичного розв'язку, особливо при вирішенні оптимізаційних і обернених задач теорії поля. Розрахунок значно спрощується не тільки для ідеального скін-ефекту при $\delta \rightarrow 0$, а й для сильного скін-ефекту в його розширеному розумінні, коли відстань r між джерелами зовнішнього поля і точками спостереження на поверхні тіла є обмеженою. Ефективним прийомом виявляється розкладання потенціалів і векторів поля в асимптотичний ряд [9, 10] по малому параметру $\varepsilon = \mu\delta/(\sqrt{2r}) < 1$, де μ – відносна магнітна проникність електропровідного середовища. Таке уявлення дозволяє також зробити подальші висновки відносно загальних особливостей формування тривимірного електромагнітного поля. Зокрема, встановлено, що на плоскій границі напруженість поля визначається не тільки величиною компонент відомого зовнішнього поля, як в моделі ідеального скін-ефекту, а й його похідними по координаті, перпендикулярній до поверхні поділу середовищ. Тим самим визначається вплив неоднорідності поля у поверхні, а розподіл поля на поверхні не потребує розв'язання додаткових крайових задач.

Особливість застосованих степеневих асимптотичних рядів типу Пуанкаре [11, 12] полягає в обмеженій кількості їх членів N . Це пов'язано з похибкою визначення кожного члену ряду, яка збільшується зі збільшенням величини параметру ε і номеру члену ряду n . Тому існує така кількість членів ряду, при якому похибка є мінімальною і подальше збільшення їх кількості тільки збільшує похибку. У [9, 10] наведені питання меж застосування асимптотичного методу для загального випадку довільного зовнішнього поля, аналіз похибок, вибір числа членів обмеженого ряду, а також оптимального с позицій точності числа членів ряду в залежності від малого параметру. Крім того, при обчисленні величини поля у зв'язку з похибкою визначення членів ряду їх значення враховуються з ваговою функцією, величина якої залежить від оцінки похибки.

У [9], зокрема, показано, що розрахунки з достатньою точністю можливо виконувати для значення малого параметру $\varepsilon \leq 0,3$. Така умова виконується в багатьох технологічних процесах, де необхідно забезпечити сильну взаємодію індуктора і електропровідного тіла. Наприклад, у пристроях для високо частотного індукційного нагріву плоских металевих виробів [13, 14] відстань між індуктором і тілом зазвичай не перевищує $h = 3$ см. В цьому випадку при $\varepsilon = 0,3$, наприклад, для виробів з латуні ($\mu = 1$, $\gamma = 1,25 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$) при $h = 0,03$ м розрахунки можливо виконувати для частот $f = \omega/2\pi \geq 125$ Гц. В устаткуванні для впливу сильного поля для покращення механічних властивостей металевих виробів [15, 16] відстань складає $h = 0,01-0,02$ м. У цьому випадку при $h = 0,01$ м для алюмінію ($\mu = 1$,

$\gamma = 3,71 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$) припустимі частоти є $f \geq 380$ Гц. Зазначимо, що пристрої для відмічених тут технологічних процесів є прикладами об'єктів, при розробці яких можуть використовуватися методи розрахунку, що досліджуються.

Джерелами зовнішнього поля можуть бути не тільки контури зі змінним струмом. У загальному випадку джерела зовнішнього поля можуть бути представлені також системою магнітних моментів [17]. Таке представлення навіть більш зручне, оскільки у квазістационарному наближенні контур повинен бути замкненим и не може бути поділений на частини [18]. В той же час для магнітного поля системи магнітних моментів справедливим є принцип суперпозиції. Кожен магнітний момент \mathbf{m} є окремим джерелом поля, векторний \mathbf{A} ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) і скалярний φ_m магнітні потенціали якого у немагнітному середовищі

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{r}; \quad (1)$$

$$\varphi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

визначають однакову напруженість магнітного поля \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi_m = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r}}{r^4} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (2)$$

тут вектор \mathbf{r} направлений із точки джерела (моменту) в точку спостереження.

Кожен контур зі струмом I_0 , для електромагнітного поля якого у [7] надано розрахункові вирази, може бути замінений поверхнею S , що опирається на замкнений контур з джерелами поля у вигляді подвійного шару магнітних зарядів (магнітних моментів) $d\mathbf{m} = \mu_0 I_0 d\mathbf{S} \mathbf{n}$, де $\mu_0 I_0 \mathbf{n}$ – вектор поверхневої густини розподіленого магнітного моменту, спрямованого вздовж нормалі \mathbf{n} до поверхні (рис. 1).

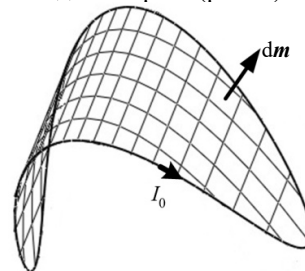


Рис. 1. Заміна контуру зі струмом поверхнею подвійного шару магнітних зарядів (магнітних моментів)

Тепер, на відміну від знайдених виразів для контуру, в розрахунках допускається застосування принципу суперпозиції з сумування полів, створених системою магнітних моментів, що покривають поверхню S . Зі збільшенням відстані від джерела поля до точки спостереження кількість магнітних моментів, що забезпечують необхідну точність, зменшується. На значній відстані джерело поля може бути представлене одним сумарним магнітним моментом, що створює поле (1), (2).

На даний час, незважаючи на досить загальний характер використання поля магнітних моментів, відсутні в достатній мірі конкретні дослідження їх застосування для представлення поля зовнішніх джерел в асимптотичному методі розрахунку електромагнітного поля. Тому дослідження можливості їх засто-

сування в практиці аналітичних розрахунків тривимірних квазістационарних полів є актуальною задачею.

Метою роботи є дослідження особливостей розподілу та отримання конкретних розрахункових співвідношень для неоднорідного квазістационарного електромагнітного поля на поверхні електропровідного півпростору, поблизу поверхні якого розташований магнітний момент, що змінюється в часі за синусоїдальним законом, з урахуванням вихрових струмів в електропровідному середовищі в умовах прояву сильного скін-ефекту.

Математична модель. Вважається, що поблизу електропровідного півпростору з електропровідністю γ і відносною магнітною проникністю μ на відстані h у діелектричному немагнітному середовищі розташований магнітний момент, що змінюється у часі за синусоїдальним законом з циклічною частотою ω $\dot{m} = \dot{m}_{\parallel} + \dot{m}_{\perp}$ (рис. 2). Тут і надалі комплексні амплітуди позначаються крапкою над відповідним символом. В загальному випадку магнітний момент довільно орієнтований відносно поверхні поділу середовищ: складова $\dot{m}_{\parallel} = \dot{m}_{\parallel} e_{\parallel}$ орієнтована паралельно поверхні вздовж одиничного вектора e_{\parallel} ; складова $\dot{m}_{\perp} = \dot{m}_{\perp} e_z$ орієнтована вздовж нормального до поверхні одиничного вектора e_z .

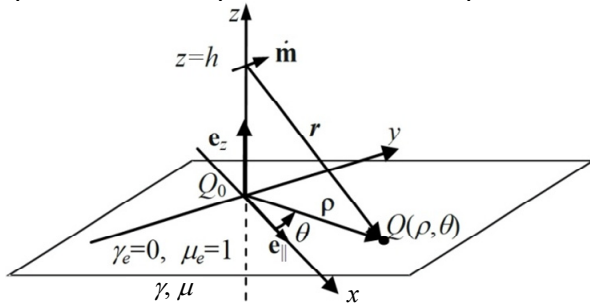


Рис. 2. Розташування магнітного моменту поблизу електропровідного півпростору

В основу розв'язку задачі для електромагнітного поля на поверхні поділу середовищ покладено точне рішення для системи: «довільний просторовий контур з синусоїдальним струмом як джерело зовнішнього поля – електропровідний півпростір» [7]. У [8] показано, що у випадку сильного скін-ефекту в розширеному розумінні при $\varepsilon < 1$ з урахуванням неоднорідності зовнішнього поля на поверхні електропровідного тіла з плоскою поверхнею напруженості електричного і магнітного полів повністю визначаються напруженістю магнітного поля зовнішніх джерел \dot{H}_0 . Отримані вирази у вигляді розкладання в обмежений асимптотичний ряд для дотичних і нормальних компонент напруженостей електричного $\dot{E} = \dot{E}_{\parallel} + \dot{E}_{\perp}$ і магнітного $\dot{H} = \dot{H}_{\parallel} + \dot{H}_{\perp}$ полів є такими:

- Дотичні компоненти полів, які є однаковими на поверхні в діелектричному і електропровідному середовищах:

$$\dot{E}_{\parallel}(z=0) = \zeta \sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left(\frac{\varepsilon r}{\sqrt{j}} \right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} e_z \times \dot{H}_{0\parallel} \right\} \Big|_{z=0}; \quad (3)$$

$$\dot{H}_{\parallel}(z=0) = - \sum_{n=0}^{N+1} 2a_{n-1}(\mu) \left(\frac{\varepsilon r}{\sqrt{j}} \right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \dot{H}_{0\parallel} \right\} \Big|_{z=0}, \quad (4)$$

де $\zeta = p/\gamma$ – поверхневий імпеданс, $p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma}$ – стала розповсюдження, j – умовна одиниця. В (3) і (4) враховано, що $\varepsilon r/\sqrt{j} = \mu/p$. Коефіцієнти $a_n(\mu)$ є коефіцієнтами розкладання у ряд Тейлора функції

$$1/w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) \left(\chi/\sqrt{j} \right)^n, \quad \text{де } w(\chi) = \frac{\chi}{\sqrt{j}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{j}} \right)^2},$$

прийнято, що $a_{-1} = -1$. Кількість членів обмеженого асимптотичного ряду N визначається, насамперед, значенням малого параметра ε [9, 10].

- Нормальні компоненти електричного \dot{E}_{\perp}^+ , \dot{E}_{\perp}^- і магнітного \dot{H}_{\perp}^+ , \dot{H}_{\perp}^- полів по різні боки поверхні в діелектричному ($z=0+0$) і електропровідному ($z=0-0$) середовищах є різними.

У будь-якій точці електропровідного середовища компонента напруженості електричного поля, що спрямована перпендикулярно до поверхні, в загальному випадку для довільних значень параметра ε дорівнює нулю. На поверхні тіла в діелектричному середовищі при довільному значенні ε напруженість електричного поля повністю визначається індукованим електричним полем зовнішніх джерел і вважається відомим

$$\dot{E}_z(z < 0) = 0; \quad \dot{E}_{\perp}^+ = -2j\omega\dot{A}_{0z}(z=0), \quad (5)$$

де $\dot{A}_{0z}(z=0)$ – нормальна компонента векторного потенціалу магнітного поля зовнішніх джерел.

З урахуванням безперервності нормальної компоненти вектора індукції магнітного поля вирази для нормальних компонент напруженості по різні сторони від поверхні виявляються

$$\dot{H}_{\perp}^+ = \mu\dot{H}_{\perp}^- = - \sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left(\frac{\varepsilon r}{\sqrt{j}} \right)^{n+1} \left\{ \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \dot{H}_{0\perp} \right\} \Big|_{z=0}. \quad (6)$$

Нульовий член асимптотичних рядів в (3) і (4) відповідає наближеній моделі, в якій приймається, що поле на поверхні є однорідним і нормальною компонентою напруженості магнітного поля дорівнює нулю. При цьому значення дотичного магнітного поля на поверхні відповідає магнітному полю на поверхні тіла з ідеальною провідністю і відповідно рівною нулю глибиною проникнення поля $\delta \rightarrow 0$.

У виразах (3) – (6) врахована неоднорідність поля зовнішніх джерел. Про це свідчить наявність у виразах похідних по координаті, спрямованої перпендикулярно поверхні поділу середовищ. Вплив неоднорідності електромагнітного поля для дотичних компонент виявляється у членах ряду з номерами $n \geq 1$. Нормальна компонента зовнішнього поля враховується вже у першому члені асимптотичного ряду.

Наведені вирази розподілу електромагнітного поля є наближеними. У представлених далі розрахункових прикладах значення малого параметра не перевищує припустиме значення $\varepsilon = 0,3$. Число членів асимптотичного ряду дорівнювало чотирьом ($N = 3$). При цьому згідно оцінкам, виконаним у [9, 10], відносна похибка визначення напруженостей поля не перевищувала значення $\Delta_N = 5 \cdot 10^{-3}$.

За виразами (3), (4), (6) далі розраховуються компоненти електричної і магнітної складових поля

на плоскій поверхні електропровідного тіла окремо для компонент магнітного моменту, що орієнтовані вздовж нормалі і паралельно до поверхні.

Електромагнітне поле магнітного моменту \mathbf{m}_\perp , орієнтованого вдовж нормалі до поверхні. Зовнішнє магнітне поле магнітного моменту $\dot{\mathbf{m}}_\perp = \dot{m}_z \mathbf{e}_z$ має осьову симетрію і вираз для нього зручно записати у циліндричній системі координат (ρ, θ, z) з одиничними векторами $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, спрямованими вздовж відповідних координат. Тоді у відповідності с (2) магнітний момент у довільній точці простору створює поле

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_0 &= \frac{1}{4\pi} \left[3 \frac{(\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\dot{\mathbf{m}}}{r^3} \right] = \\ &= \frac{\dot{m}_z}{4\pi} \left[3 \frac{(z-h)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \mathbf{e}_z + \frac{\dot{m}_z}{4\pi} 3 \frac{(z-h)\rho}{r^5} \mathbf{e}_\rho. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр ε , за яким здійснюється розкладання в асимптотичний ряд виразів для електромагнітного поля, залежить від відстані r між точками витoku і спостереження на поверхні поділу середовищ. Параметр приймає максимальне значення в точці Q_0 на поверхні безпосередньо під магнітним моментом, де відстань $r = h$ є мінімальною. В цій точці похибка наближеного методу розрахунку є найбільшою.

Для подальшого аналізу будемо використовувати єдине максимальне значення малого параметра $\varepsilon_m = \mu\delta / (h\sqrt{2}) = \varepsilon(r/h)$. Із застосуванням величин h і ε_m поверхневий імпеданс виявляється $\zeta = \sqrt{j\omega\mu_0 h \varepsilon_m}$.

Підставляючи значення зовнішнього магнітного поля (7) у вирази для напруженостей полів (3), (4), (6), отримуємо їх розподіл вдовж радіальної координати ρ на поверхні електропровідного тіла в залежності від величини малого параметра ε_m , а також від висоти розташування h і циклічної частоти поля ω .

Нормовані значення напруженостей електричного і магнітного полів введено таким чином:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\parallel}^* = \dot{\mathbf{E}}_{\parallel} / \left(\frac{\mu_0 \dot{m}_z \omega}{4\pi h^2} \right) \quad \text{і} \quad \dot{\mathbf{H}}^* = \dot{\mathbf{H}} / \left(\frac{\dot{m}_z}{4\pi h^3} \right).$$

Вираз для нормованого значення дотичної компоненти напруженості електричного поля приймає такий вигляд:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\parallel}^* = \mathbf{e}_\theta \sqrt{j} 6 \frac{\rho}{h} \varepsilon_m \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^n h^{n+4} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{z-1}{r^5} \right) \Big|_{z=0}. \quad (8)$$

У свою чергу, нормовані значення дотичної і нормальної до поверхні компонент напруженості магнітного поля виявляються

$$\dot{\mathbf{H}}_{\parallel}^* = -\mathbf{e}_\rho 6 \frac{\rho}{h} \sum_{n=0}^{N+1} a_{n-1} \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^n h^{n+4} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{z-1}{r^5} \right) \Big|_{z=0}; \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{\perp}^* = \mathbf{e}_z 2 \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^{n+1} h^{n+4} \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \left(\frac{2(z-1)^2 - \rho^2}{r^5} \right) \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

З представлених залежностей видно, що в даному випадку осесиметричного електромагнітного поля напруженість електричного поля має тільки одну азимутальну компоненту, а напруженість магнітного поля представлена радіальною і нормальною до поверхні компонентами

На рис. 3 – 5 надані залежності розподілу нормованих компонент комплексних амплітуд напруженостей електромагнітного поля $\dot{\mathbf{E}}_\theta^* = \pm \left| \dot{\mathbf{E}}_\theta^* \right| \exp(j\varphi_{E\theta})$ і $\dot{\mathbf{H}}_k^* = \pm \left| \dot{\mathbf{H}}_k^* \right| \exp(j\varphi_{Hk})$ де $k = \rho, z$. Знак « \pm » перед модулем комплексної амплітуди використовується, щоб вказати на протилежний до обраного напрямком компоненти вектора поля. В цьому випадку одночасно кут зсуву фаз відносно фази магнітного моменту змінюється на π .

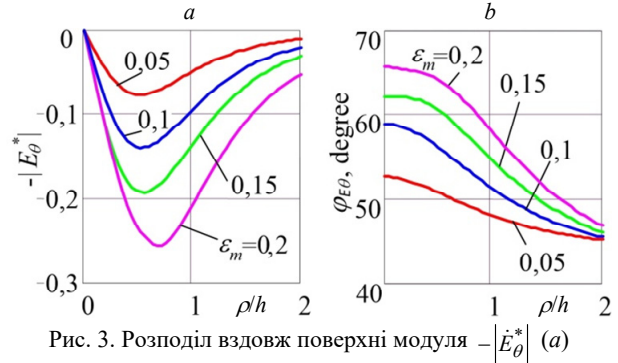


Рис. 3. Розподіл вздовж поверхні модуля $-\left| \dot{\mathbf{E}}_\theta^* \right|$ (a)

і кута зсуву фаз $\varphi_{E\theta}$ (b) дотичної компоненти напруженості електричного поля для джерела \mathbf{m}_\perp

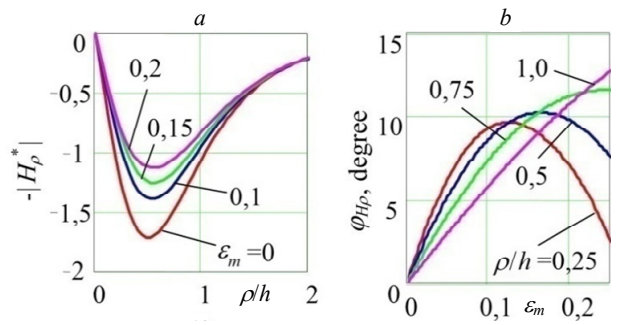


Рис. 4. Радіальна компонента напруженості магнітного поля: залежність модуля $-\left| \dot{\mathbf{H}}_\rho^* \right|$ від радіальної координати (a);

залежність кута зсуву фаз $\varphi_{H\rho}$ від параметра ε_m (b)

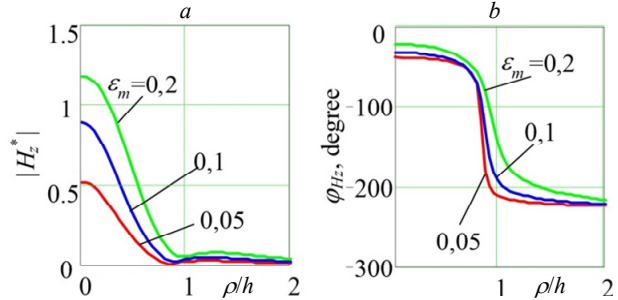


Рис. 5. Розподіл вздовж поверхні модуля $\left| \dot{\mathbf{H}}_z^* \right|$ (a)

і кута зсуву фаз φ_{Hz} (b) нормальної компоненти напруженості магнітного поля

Для ідеального скін-ефекту при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ дотична напруженість електричного поля, як і нормальна компонента магнітного поля, дорівнюють нулю. У цьому випадку дотична напруженість магнітного поля дорівнює подвоєному значенню дотичної компоненти зовнішнього магнітного поля [9]. Таке поле використовується у спрощеній моделі дифузії локально однорідного поля в електропровідне тіло у даному випадку дифузії поля в електропровідний півпростір. У даному

випадку поля магнітного моменту зсув фази дорівнює нулю, дотична компонента спрямована назустріч радіальної координати (9), досягає максимального значення в точках окружності радіусу $\rho = h/2$ і дорівнює $\dot{H}_{\parallel \max}^* = -6 \cdot 0,5 / \sqrt{0,5^2 + 1} = -1,717$.

З представлених даних на рис. 3 – 5 видно, що при збільшенні параметру ε , тобто зі збільшенням впливу неоднорідності зовнішнього електромагнітного поля при його дифузії в електропровідний півпростір, характер розподілу поля по поверхні змінюється.

Дотична компонента електричного поля (рис. 3) вже не дорівнює нулю і збільшується з ростом параметру ε . Дотична компонента напруженості магнітного поля навпаки зменшується з ростом ε . При цьому, як видно з рис. 4, *b*, залежність від параметру ε зсуву фази відносно фази зовнішнього джерела має немонотонний характер.

Для неоднорідного поля при кінцевій товщині скін слою, тобто у випадку $\varepsilon > 0$, нормальна компонента напруженості магнітного поля вже не дорівнює нулю. Зазначимо, що вже для параметру $\varepsilon \cong 0,2$ нормальна компонента $\left| \dot{H}_z^* \right|$ стає співрозмірною з дотичною компонентою $\left| \dot{H}_\rho^* \right|$ і неврахування цієї компоненти поля у спрощених моделях може призводити до суттєвих похибок розрахунків. Зазначимо також, що нормальна компонента магнітного поля стає несуттєвою на відстані $\rho/h \geq 0,8$. В області $\rho/h \geq \approx 0,8 \div 1,0$ зсув фази нормальної компоненти поля різко змінюється приблизно на 180° . Це означає, що в цій області відбувається зміна напрямку нормальної компоненти поля порівняно з напрямком в області $\rho/h \leq 0,8$.

Зазначимо також, що магнітне поле виявляється еліптично поляризованим. Про це свідчить те, як видно з рис. 4, *b* і рис. 5, *b*, що фази взаємно перпендикулярних компонент магнітного поля \dot{H}_ρ^* і \dot{H}_z^* відрізняються одна від одної.

Електромагнітне поле магнітного моменту m_{\parallel} , орієнтованого паралельно поверхні. На відміну від попереднього випадку нормально орієнтованого магнітного моменту магнітне поле магнітного моменту $\dot{m}_{\parallel} = \dot{m}_{\parallel} e_{\parallel}$ орієнтованого паралельно поверхні поділу середовищ, зручно записувати у декартовій системі координат (x, y, z) , вісі x і y якої лежать на поверхні, причому вісь x спрямована вздовж проекції вектора \dot{m}_{\parallel} на плоску поверхню (рис. 2). Одиничні вектори системи координат є (e_x, e_y, e_z) .

Зовнішнє магнітне поле магнітного моменту, що розглядається, в декартовій системі координат має всі три компоненти

$$\dot{H}_0 = \frac{\dot{m}_{\parallel}}{4\pi} \left[\frac{2x^2 - y^2 - (z-h)^2}{r^5} e_x + \frac{3xy}{r^5} e_y + \frac{x(z-h)}{r^5} e_z \right]. \quad (11)$$

Після підстановки (11) у вирази (3), (4), (6) для напруженостей електричного і магнітного полів на поверхні поділу середовищ отримаємо

$$\dot{E}_{\parallel} = \frac{\mu_0 \dot{m}_{\parallel} \omega}{4\pi h^2} \sqrt{j} 2\varepsilon_m \times \left\{ e_y \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^n h^{n+3} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{2x^2 - y^2}{r^5} - \frac{(z-1)^2}{r^5} \right) \right\}_{z=0} - \left\{ -e_x \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^n h^{n+3} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{3xy}{r^5} \right) \right\}_{z=0} \quad ; (12)$$

$$\dot{H}_{\parallel} = \frac{\dot{m}_{\parallel}}{4\pi h^3} 2 \times \left\{ -e_x \sum_{n=0}^N a_{n-1} \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^n h^{n+3} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{2x^2 - y^2}{r^5} - \frac{(z-1)^2}{r^5} \right) \right\}_{z=0} + \left\{ +e_y \sum_{n=0}^N a_{n-1} \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^n h^{n+3} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{3xy}{r^5} \right) \right\}_{z=0} \quad ; (13)$$

$$\dot{H}_{\perp} = \frac{\dot{m}_{\parallel}}{4\pi h^3} e_z 2 \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{j}} \right)^{n+1} h^{n+4} \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \left(\frac{x(z-1)}{r^5} \right) \Big|_{z=0} \quad . (14)$$

У даному випадку електромагнітне поле на поверхні півпростору є симетричним відносно осі x . Компоненти напруженостей електричного $\dot{E}_{\parallel x}$ і магнітного $\dot{H}_{\parallel y}$ полів мають парну симетрію, компоненти $\dot{E}_{\parallel y}$, $\dot{H}_{\parallel x}$, $\dot{H}_{\perp z}$ електромагнітного поля мають непарну симетрію відносно вісі x .

Загальне уявлення про формування електромагнітного поля можна отримати, якщо розглянути спочатку ідеальний скін-ефект. В цьому випадку достатньо розглянути формування магнітного поля тільки в діелектричному середовищі. Для розрахунку магнітного поля моменту, що розташований над поверхнею поділу середовищ, може бути використаний метод дзеркальних відбиттів. Зауважимо, що у випадку ідеального скін-ефекту загальний розв'язок задачі знаходження магнітного поля зводиться до врахування струму вихідного і дзеркально відбитого від поверхні контуру з протилежно спрямованим струмом [7]. Таке уявлення для магнітних моментів, на відміну від струмів, зводиться до однакового напрямку дотичних компонентів і протилежного напрямку нормальних компонентів вихідного m і дзеркально відбитого m_1 моментів [17] (рис. 6, *a*).

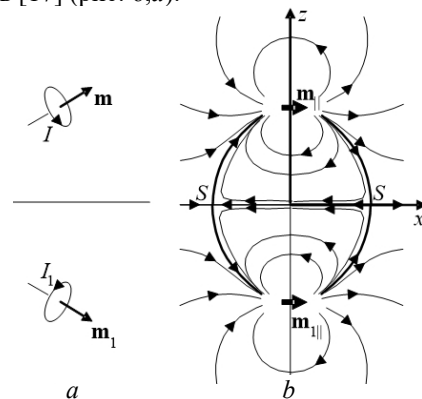


Рис. 6. Структура магнітного поля магнітного моменту, розташованого над півпростором з ідеальною провідністю

Структуру магнітного поля двох однаково спрямованих магнітних моментів m_{\parallel} і m_{\perp} (рис. 6, *b*) зручно проаналізувати за допомогою визначення особливих точок [19, 20], в яких векторне поле дорівнює нулю. Знайдемо такі точки в вертикальній площині $y = 0$. Компонента поля, що перпендикулярна до цієї площини, дорівнює нулю $H_y = 0$. У силу симетрії для двох магнітних моментів перпендикулярна до вісі x компонента поля, що спрямована вздовж осі z також дорівнює нулю $H_z = 0$. Залишилося знайти нульове значення компоненти H_x на вісі x . Обидва магнітних моменти мають однакові компоненти поля H_x . В результаті для цієї компоненти отримуємо

$$H_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_x = 2 \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}_{\parallel} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x)}{r^4} - \frac{\mathbf{m}_{\parallel} \cdot \mathbf{e}_x}{r^3} \right] = \frac{m_{\parallel}}{2\pi} \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{m_{\parallel}}{2\pi} \frac{2x^2 - h^2}{r^5}. \quad (15)$$

Звідси випливає, що особливі точки поля в площині $y = 0$ знаходяться в точках осі, паралельній напрямку магнітних моментів, $x = \pm h/\sqrt{2}$. Це особливі точки гіперболічного типу (сідло) S , через які проходять сепаратиси – силові лінії поля (показані жирними лініями), які відділяють області з різним характером формування поля. На рис. 6, *b* для наочності показані лінії магнітного поля не тільки над поверхнею тіла, а й в області $z < 0$, де у випадку ідеального скін-ефекту поле відсутнє.

Рис. 7 ілюструє залежності різних компонентів напруженості магнітного поля від координат на площині і від величини малого параметра ε_m , відмінність від нуля якого вказує на вплив кінцевого значення глибини проникнення неоднорідного електромагнітного поля. На всіх рисунках залежності для ідеального скін-ефекту $\varepsilon = 0$ показані жирними кривими.

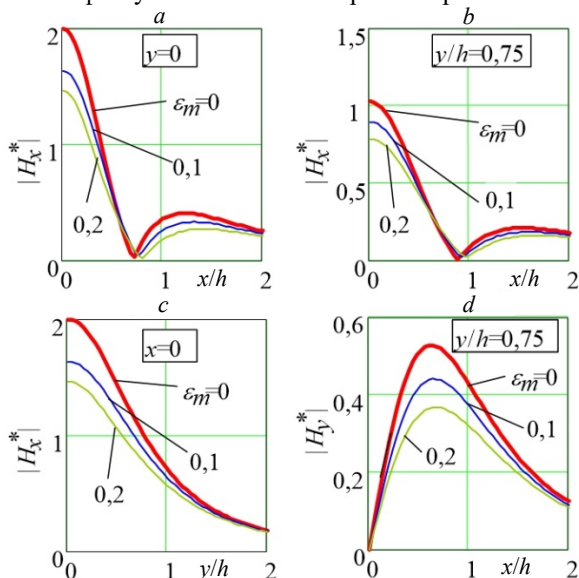


Рис. 7. Розподіл дотичної складової магнітного поля на поверхні поділу середовищ для джерела m_{\parallel}

Як видно з рис. 6, *b*, при $\varepsilon_m = 0$ дотична компонента напруженості магнітного поля на поверхні тіла міняє напрямок при переході через особливі точки S . Ця особливість розподілу поля відображена також на рис. 7, *a*. При $\varepsilon_m > 0$, коли вихрові струми течуть вже

не по поверхні, а займають певний шар кінцевої товщини, спостерігається загальна тенденція зменшення магнітного поля. При цьому положення особливої гіперболічної точки практично не змінюється.

При віддаленні від площини $y = 0$ поздовжня (паралельна напрямку магнітного моменту) компонента напруженості магнітного поля зменшується (рис. 7, *c*). Нульове значення цієї компоненти, як і раніше, має місце. Однак при $y \neq 0$ не всі компоненти напруженості поля дорівнюють нулю у відповідних точках поверхні. Компонента дотичної напруженості, що перпендикулярна вісі x , виявляється відмінною від нуля (рис. 7, *d*).

Зазначена особливість ілюструється на рис. 8. Нормальна компонента напруженості магнітного поля (рис. 8, *a*) залишається незначною порівняно з максимальним значенням дотичної компоненти магнітного поля (рис. 7, *a*). Але в області поблизу особливих точок поля нормальна компонента стає переважною.

Напруженість електричного поля при зовнішньому полі горизонтального магнітного моменту (рис. 8, *b*) за значенням ε порівняно з електричним полем, що створюється при дії магнітного моменту, орієнтованого нормально до поверхні (рис. 5).

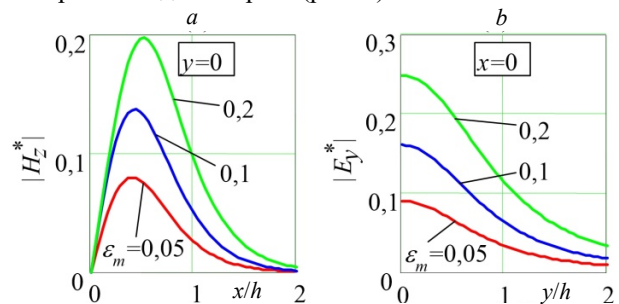


Рис. 8. Розподіл по поверхні модулів нормальної компоненти магнітного поля (*a*) і дотичної компоненти електричного поля (*b*) для джерела m_{\parallel}

Висновки. З представлених результатів як для нормально орієнтованого магнітного моменту, так і моменту, спрямованому паралельно поверхні поділу середовищ, впливає, що математичні моделі з ідеальним скін-ефектом при $\delta \rightarrow 0$ мають обмежену область застосування. У випадку дії неоднорідного поля зовнішніх джерел, коли глибина проникнення поля стає співрозмірною з відстанню до електропровідного тіла, необхідно застосовувати більш коректні математичні моделі електромагнітного поля. Зручним способом опису електромагнітного поля уявляються аналітичні підходи з застосуванням розкладання поля в асимптотичні ряди по введеному малому параметру ε .

Знайдені конкретні вирази для електромагнітного поля на поверхні між електропровідним і діелектричним півпростором при дії довільно орієнтованого магнітного моменту уявляються більш загальними, ніж використання замкнених контурів зі змінним струмом, оскільки розширюють види джерел зовнішнього поля, що враховуються, і дозволяють використати метод суперпозиції замість інтегрування по всьому контуру.

У випадках, що допускають застосування моделі електропровідного півпростору при сильному скін-ефекті, знайдені конкретні вирази для поля на поверхні, які повністю визначаються відомим полем зовнішніх джерел (в даному випадку – полем магнітних моментів). Це значно спрощує розв'язок відповідних задач, оскільки відпадає необхідність окремого розв'язку рівнянь поля.

Подальший розвиток досліджень може бути спрямований на визначення поля при дії інших типів джерел неоднорідного зовнішнього поля, знаходження імпедансної граничної умови для таких полів, і нарешті, як загальну програму, поширення застосованого підходу на системи з криволінійними поверхнями поділу середовищ.

Подяка. Робота виконана за проектом «Розвиток теорії та моделювання нестационарних електрофізичних процесів у провідних і діелектричних середовищах імпульсних електромагнітних систем» (код: Бар'єр-3), що фінансується Національною академією Наук України.

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Elsevier Ltd, 1984. 475 p. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-030275-1.50024-2>.
2. Simonyi K. *Foundation of Electrical Engineering*. Elsevier Ltd, 1963. 865 p. doi: <https://doi.org/10.1016/c2013-0-02694-1>.
3. Leontovich M.A. On the Approximate Boundary Conditions for Electromagnetic Field on the Surface of Highly Conducting Bodies. *Radio Wave Propagation Studies*, 1948, pp. 5-12. (Rus).
4. Yuferev S., Ida N. *Surface Impedance Boundary Conditions: A Comprehensive Approach*. CRC Press, 2018. 412 p. doi: <https://doi.org/10.1201/9781315219929>.
5. Berdnik S.L., Penkin D.Y., Kartich V.A., Penkin Y. M., Nesterenko M.V. Using the concept of surface impedance in problems of electrodynamics (75 years later). *Radio Physics and Radio Astronomy*, 2014, vol. 19, no. 1, pp. 57-80. doi: <https://doi.org/10.15407/rpra19.01.057>.
6. Berdnyk S., Gomozov A., Gretsikh D., Kartich V., Nesterenko M. Approximate boundary conditions for electromagnetic fields in electrodynamics. *Radioelectronic and Computer Systems*, 2022, no. 3, pp. 141-160. doi: <https://doi.org/10.32620/reks.2022.3.11>.
7. Vasetsky Y., Zaporozhets A. Electromagnetic Field Near Conducting Half-Space: Theory and Application Potentials. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2023, vol. 1070, 124 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-38423-3>.
8. Vasetsky Y.M. Penetration of non-uniform electromagnetic field into conducting body. *Electrical Engineering & Electromechanics*, 2021, no. 2, pp. 43-53. doi: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2021.2.07>.
9. Vasetsky Y., Zaporozhets A. Approximate Mathematical Models for Analysis of Alternating Electromagnetic Field of Sources Near Conducting Body. Electromagnetic Field Near Conducting Half-Space. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2023, vol. 1070, pp. 33-67. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-38423-3_2.
10. Vasetskyi Y., Mazurenko I. Parameters for calculation of three-dimensional electromagnetic field by asymptotic expansion method. *Computational Problems of Electrical Engineering*, 2020, vol. 10, no. 1, pp. 37-44. doi: <https://doi.org/10.23939/jcpee2020.01.037>.
11. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley-VCH, 1993. 536 p.
12. Smirnov V.I. *A Higher Mathematics Course, Complex variables, special functions. vol. 3, part 2*. Oxford, Pergamon Press, 1964. 700 p.
13. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. *Handbook of Induction Heating*. London, Taylor & Francis Ltd, 2017. 772 p. doi: <https://doi.org/10.1201/9781315117485>.
14. Lucia O., Maussion P., Dede E.J., Burdior J.M. Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, vol. 61, no. 5, pp. 2509-2520. doi: <https://doi.org/10.1109/TIE.2013.2281162>.
15. Raschepkin A.P., Kondratenko I.P., Karlov O.M., Kryshchuk R.S. A method for calculating electromagnetic field of a spiral type induction system for magnetopulse processing of non-magnetic metal strips with a ferromagnetic shield. *Technical Electrodynamics*, 2022, no. 2, pp. 43-51. (Ukr). doi: <https://doi.org/10.15407/techned2022.02.043>.

How to cite this article:

Vasetsky Yu.M. Analytical determination of a quasi-stationary electromagnetic field created by magnetic moments and eddy currents in conducting half-space. *Electrical Engineering & Electromechanics*, 2024, no. 3, pp. 48-54. doi: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2024.3.07>

16. Lobanov L.M., Pashchyn M.O., Mykhodui O.L., Sydorenko Y.M. Effect of the Indenting Electrode Impact on the Stress-Strain State of an AMg6 Alloy on Electrodynamic Treatment. *Strength of Materials*, 2017, vol. 49, no. 3, pp. 369-380. doi: <https://doi.org/10.1007/s11223-017-9877-1>.

17. Polivanov K.M. *Theoretical Bases of Electrical Engineers. Vol. 3. Theory of Electromagnetic Field*. Moscow, Leningrad, Energiia Publ., 1965. 352 p. (Rus).

18. Tamm I.E. *Fundamentals of the Theory of Electricity*. Moscow, Mir Publ., 1979. 684 p. (Rus).

19. Novikov S.R., Fomenko A.T. *Basic elements of differential geometry and topology*. Springer, 1990. 500 p.

20. Theisel H., Rössl C., Weinkauff T. Topological Representations of Vector Fields. *Mathematics and Visualization*, 2008, pp 215-240. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-33265-7_7.

Надійшла (Received) 13.11.2023

Прийнята (Accepted) 15.01.2024

Опублікована (Published) 01.05.2024

Васецький Юрій Макарович¹, д.т.н., проф.,

¹ Інститут електродинаміки НАН України,

03057, Київ, пр. Берестейський, 56,

e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com (Corresponding Author)

Yu.M. Vasetsky¹

¹ Institute of Electrodynamics National Academy of Sciences of Ukraine,

56, Prospect Beresteyskiy, Kyiv-57, 03057, Ukraine.

Analytical determination of a quasi-stationary electromagnetic field created by magnetic moments and eddy currents in conducting half-space.

Aim. Study of the distribution of a three-dimensional alternating quasi-stationary electromagnetic field at the surface of conducting half-space with strong skin-effect, the source of which is an arbitrarily oriented magnetic moment. **Methodology.** The expressions for non-uniform electromagnetic field with strong skin effect are used for the analysis, which is based on the found exact analytical solution of the general three-dimensional problem and the use of expansion into asymptotic series with respect to a small parameter that is proportional to the ratio of the field penetration depth to the distance between the sources of the external field and the surface of body. Specific expressions at the surface are completely determined by the known field of external sources. In this work, the external magnetic moment field is used. **Results.** For strong skin effect, expressions for the electric and magnetic field strength are obtained separately for the components of the magnetic moment oriented perpendicularly and parallel to the flat surface between the dielectric and conducting areas. The features of the electromagnetic field distribution are analyzed depending on the value of introduced small parameter. The results are presented for the module and phase shift of the field strength with respect to the phase of the external field source. **Originality.** The expressions found for the electromagnetic field appear to be more general than the use of closed contours with alternating current, since they extend types of external field sources and allow the use of the superposition method instead of integration over the entire contour. **Practical value.** The found specific analytical expressions of the electromagnetic field at the surface for the external field of magnetic moments significantly simplify the solution of the problems, since they do not require additional solution of the field equations. References 20, figures 8.

Key words: three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field, strong skin effect, external field of magnetic moments, asymptotic method, analytical solution.