

Ю.М. Васецкий

ПРОНИКНОВЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЕ ТЕЛО

Дослідження засноване на точному аналітичному розв'язку загальної задачі спряження тривимірного квазістационарного поля на межі розділу діелектричного і електропровідного середовищ. Встановлено, що неоднорідне електромагнітне поле завжди зменшується в глибині швидше, ніж однорідне. Теоретичний висновок підтверджується зіставленням результатів аналітичних і чисельних розрахунків. Поняття сильного скін-ефекту поширюється на випадок, коли глибина проникнення мала порівняно не тільки з характерними розмірами тіла, але також коли відношення глибини проникнення до відстані від поверхні тіла до джерел зовнішнього поля є малим параметром. Для сильного скін-ефекту в його розширеній інтерпретації проаналізовано вплив неоднорідності зовнішнього поля на формування електромагнітного поля на межі і на закон зменшення поля в провідному півпросторі. Показано, що на межі вирази у вигляді асимптотичних рядів крім локальних значень поля зовнішніх джерел містять їх похідні по координаті, перпендикулярній граничній поверхні. Отримані вирази дозволили узагальнити наблизену імпедансну граничну умову Леонтовича для дифузії неоднорідного поля в провідний півпростір. Відмінність законів проникнення для неоднорідного і однорідного полів має місце в членах асимптотичного ряду, пропорційних малому параметру в другому ступені і другій похідній по вертикальній координаті від напруженості зовнішнього магнітного поля у граничній поверхні. Бібл. 25, рис. 8.

Ключові слова: тривимірне електромагнітне поле, формування електромагнітного поля, точний розв'язок задачі, скін-ефект.

Исследование основано на точном аналитическом решении общей задачи сопряжения трехмерного квазистационарного поля на границе раздела диэлектрической и проводящей сред. Установлено, что неоднородное электромагнитное поле всегда убывает по глубине быстрее, чем однородное. Теоретический вывод подтверждается сопоставлением результатов аналитических и численных расчетов. Понятие сильного скин-эффекта распространяется на случай, когда глубина проникновения мала по сравнению не только с характерными размерами тела, но также когда отношение глубины проникновения к расстоянию от поверхности тела до источников внешнего поля является малым параметром. Для сильного скин-эффекта в его расширенной интерпретации проанализировано влияние неоднородности внешнего поля на формирование электромагнитного поля на границе и на закон убывания поля в проводящем полупространстве. Показано, что на границе выражения в виде асимптотических рядов для напряженностей полей помимо локальных значений поля внешних источников содержат их производные по координате, перпендикулярной граничной поверхности. Полученные выражения позволили обобщить приближенное импедансное граничное условие Леонтовича для диффузии неоднородного поля в проводящее полупространство. Отличие законов проникновения для неоднородного и однородного полей имеет место в членах асимптотического ряда, пропорциональных малому параметру во второй степени и второй производной по вертикальной координате от напряженности внешнего магнитного поля у граничной поверхности. Библ. 25, рис. 8.

Ключевые слова: трехмерное электромагнитное поле, формирование электромагнитного поля, точное решение задачи, скин-эффект.

Введение. Взаимодействие переменного электромагнитного поля с электропроводной средой является предметом исследования во многих технических и электрофизических приложениях. В качестве примеров можно назвать оборудование для индукционной термической обработки металлов [1-3], установки для обработки металлических материалов под действием электромагнитного поля и токов высокой интенсивности [4-6], устройства для магнитно-импульсной обработки металлов [7-9]. В электропроводных элементах этих устройств имеет место сильный скин-эффект, при котором ток и электромагнитное поле концентрируются в тонком поверхностном слое. Особенности проникновения электромагнитного поля в электропроводное тело, включая его затухание с глубиной, зависит не только от электропроводности, относительной магнитной проницаемости среды и частоты поля, но также от геометрических особенностей граничных поверхностей и характера распределения поля у поверхности. Кроме того, в упомянутых устройствах длина волны электромагнитного поля обычно намного больше любых характерных размеров системы и поэтому процессы можно считать квазистационарными, в которых волновыми явлениями можно пренебречь.

Эти два обстоятельства определяют основные ограничения – рассматривается формирование квазистационарного электромагнитного поля в системах с сильным скин-эффектом. При указанных ограничениях, как отмечается в [10], использование упрощенных подходов к расчету конкретных задач и их использование при разработке ряда численных методов имеют методологическое и практическое значение. Несмотря на долгую историю развития, исследование формирования электромагнитного поля с сильным скин-эффектом остается актуальной задачей.

Приближенные методы расчета обычно используются для определения электромагнитного поля при сильном скин-эффекте. Для идеально проводящего тела глубина проникновения поля равна нулю $\delta \rightarrow 0$ и достаточно использовать математическую модель, в которой на поверхности электропроводной среды равны нулю касательная компонента напряженности электрического поля и нормальная компонента напряженности магнитного поля [11, 12]. Конечная глубина проникновения поля учитывается в приближенных математических моделях с использованием концепции импедансного граничного условия, сформулированной М. Леонтовичем [13]. Предполагается,

© Ю.М. Васецкий

что локально электромагнитное поле проникает в металлическое тело так же, как однородное поле проникает в электропроводное полупространство.

На основе применения метода возмущений появилась возможность рассчитать поля внутри и снаружи проводников с искривленной поверхностью [14]. Решение задачи во втором приближении с использованием интегральных уравнений для криволинейных поверхностей было получено в [15]. Разложение в ряд по малому параметру, пропорциональному глубине проникновения поля, включает условие Леонтовича как приближение первого порядка. Глубина проникновения поля для таких проводников зависит от средней кривизны поверхности [16]. Для изогнутых проводников поправки первого и второго порядков к распределению поля, соответствующих диффузии однородного поля в проводящее полупространство, найдены в [17].

Понятие поверхностного импеданса позволяет использовать его при моделировании задач электродинамики с учетом геометрических и физических свойств реальных граничных поверхностей. Подробные результаты исследований в этом направлении приведены в ряде обзоров. Например, в [18] систематизирован опыт многолетних исследований по применению импедансного подхода в математическом моделировании. В статье приводятся типы структур, для которых известны методы теоретического определения значений поверхностных импедансов. Обобщенные граничные условия для аналитического определения характеристик электромагнитного поля на границе раздела сред с двумерными неоднородностями проанализированы в [19]. Подробный анализ исследований скин-эффекта в задачах электродинамики представлен в книге [10], где, среди прочего, рассматривается систематический метод построения граничных условий любого порядка, основанный на теории возмущений, сформулированы общие подходы к применению численных методов, таких как метод граничных интегральных уравнений, метод конечных элементов, метод конечных разностей, приведены конкретные примеры расчетов.

В большинстве цитируемых работ математические модели диффузии неоднородного электромагнитного поля ограничивались малым значением глубины проникновения или незначительной неоднородностью поля на поверхности тела. Ограничения, при которых для диффузии неоднородного поля справедливо импедансное граничное условие, получены в [17] для частного случая поля, возбуждаемого тонким прямолинейным проводником с током, ориентированным параллельно границе раздела сред. Точное решение позволило обосновать ограничения, при которых выполняется импедансное граничное условие для рассматриваемого неоднородного поля.

В [20] нами получено полное аналитическое решение задачи о проникновении трехмерного квазистационарного электромагнитного поля, создаваемого внешними источниками в виде токовых контуров произвольной конфигурации, расположенных вблизи проводящего полупространства. В решении отсутствуют ограничения на неоднородность поля. В [21] для

той же математической модели аналитическое решение найдено также и в диэлектрическом полупространстве. Точное решение позволило получить ряд общих обоснованных результатов формирования электромагнитного поля. В частности, основным свойством является то, что в проводящем полупространстве плотность тока и напряженность электрического поля не содержат составляющих, перпендикулярных граничной поверхности для любой системы исходных токов и произвольности зависимости токов от времени. Кроме того, в кратком сообщении как общее свойство отмечено, что неоднородное электромагнитное поле затухает в электропроводной среде быстрее, чем однородное поле [22]. Представлены также аналитические выражения для напряженностей полей на границе раздела сред, следствием которых является обобщение приближенного импедансного граничного условия Леонтовича на случай проникновения в электропроводную среду неоднородного электромагнитного поля [23]. Цитируемые работы содержат отдельные части проблемы проникновения неоднородного поля в проводящую среду и недостаточно отражают решение задачи для произвольного трехмерного квазистационарного электромагнитного поля и любых свойств сред.

Целью настоящей работы является обобщение результатов исследования проникновения трехмерного неоднородного электромагнитного поля в электропроводное полупространство, которое основано на точном аналитическом решении квазистационарной задачи для внешнего поля, создаваемого источниками в виде произвольной системы контуров с переменными токами без ограничений на свойства сред и частоту поля. Для достижения цели рассматриваются следующие конкретные задачи: обоснование следствия о том, что неоднородное электромагнитное поле при проникновении в электропроводное полупространство затухает с глубиной всегда быстрее, чем однородное поле; исследование распределения неоднородного электромагнитного поля на границе раздела диэлектрической и электропроводной сред; оценка влияния неоднородности поля на его распределение в поверхностном слое в случае сильного скин-эффекта.

Математическая модель и аналитическое решение трехмерной задачи. Настоящая работа отличается от большинства предыдущих исследований тем, что она основана на полном аналитическом решении трехмерной задачи электромагнитного поля в достаточно общей постановке [20, 21], и это позволяет получить ряд обоснованных общих следствий. Заметим, что численные методы, которые также позволяют не ограничивать глубину проникновения поля, предполагают конкретную формулировку задач, и обоснованные выводы обычно не выходят за пределы выполненных конкретных расчетов.

Математическая модель для одиночного контура с током. Аналитическое решение получено для линейной задачи сопряжения трехмерного квазистационарного поля на плоской границе раздела диэлектрической и электропроводной сред. Решение удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, которые включают равенство нормальных компо-

нент плотности тока проводимости в электропроводной среде и плотности тока смещения в диэлектрической среде. Оно основано на известном аналитическом решении задачи для излучающего токового диполя вблизи границы раздела сред. Замкнутый контур l , расположенный в непроводящей немагнитной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_e , без потери общности представляется последовательной системой диполей с неизменной вдоль контура величиной исходного тока \dot{I}_0 . Электропроводное тело моделируется полупространством с удельной электропроводностью γ и относительной магнитной проницаемостью μ , в котором индуцируются вихревые токи.

Элемент внешнего токового контура показан на рис. 1 в виде отрезка кривой в верхнем полупространстве $z > 0$. Положение точки истока поля на контуре M относительно точки наблюдения Q определяется вектором r . Ось z ориентирована перпендикулярно границе раздела сред в направлении единичного вектора e_z . Для произвольного пространственного контура единичный касательный вектор к контуру $t = t_{\parallel} + t_{\perp}$ в общем случае имеет ненулевые проекции на вертикальное направление $t_{\perp} = (t \cdot e_z)e_z$ и на поверхность раздела сред $t_{\parallel} = t - (t \cdot e_z)e_z$.

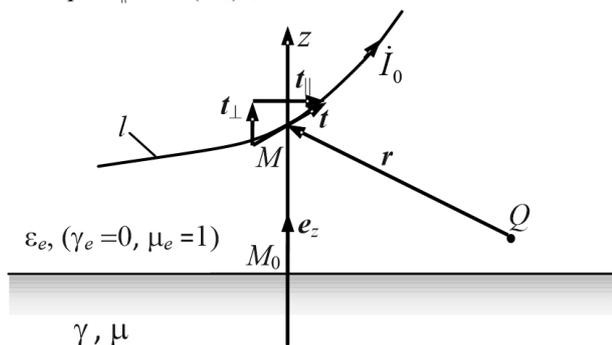


Рис. 1. Элемент произвольного пространственного контура l с током \dot{I}_0 , расположенного вблизи электропроводного полупространства

Для рассматриваемой системы в электропроводной и диэлектрической средах найдены все характеристики электромагнитного поля в виде выражений для комплексных амплитуд векторного и скалярного потенциалов, напряженностей электрического и магнитного полей. (Комплексные амплитуды мы будем помечать точкой над соответствующими величинами). Так как рассматривается линейная задача, то она легко распространяется на общий случай произвольного внешнего поля, создаваемого соответствующей системой токовых контуров и на произвольную зависимость токов от времени $I_0(t)$ с использованием преобразования Фурье.

Электромагнитное поле в проводящем полупространстве. Выражение для напряженности электрического поля в проводящем полупространстве в точке $Q(\rho, \theta, z)$ является следующим [20]:

$$\dot{E}_i = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left[t_{\parallel} T_1(\rho, \theta, z) + (t \cdot e_z) e_{\rho} T_2(\rho, \theta, z) \right] dl, \quad (1)$$

где ω – циклическая частота, i – мнимая единица, μ_0 – магнитная постоянная. Здесь используются локальные цилиндрические координаты (ρ, θ, z) с единичными базисными векторами $(e_{\rho}, e_{\theta}, e_z)$ (рис. 2). Центр системы координат расположен в точке M_0 пересечения вертикальной оси с границей раздела. Угол θ определяется относительно оси, направленной вдоль единичного вектора $e_{\parallel} = t_{\parallel}/|t_{\parallel}|$. Значения локальных координат зависят от положения точки истока M при интегрировании по контуру.

Функциями $T_1(\rho, \theta, z)$ и $T_2(\rho, \theta, z)$ в (1) являются

$$T_1(\rho, \theta, z) = \int_0^{\infty} \exp(qz) \frac{\exp(-g z_M) J_0(g\rho)}{w(g)} g dg, \quad (2)$$

$$T_2(\rho, \theta, z) = \int_0^{\infty} \exp(qz) \frac{\exp(-g z_M) J_1(g\rho)}{w(g)} g dg,$$

где $q = \sqrt{g^2 + p^2}$, $p = \sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}$ – постоянная пространства, $w(g) = g + q/\mu$, $J_0(\cdot)$ и $J_1(\cdot)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков. Так как рассматривается затухание поля по глубине, то в подынтегральных выражениях (2) отдельным множителем выделены функции, зависящие от координаты z .

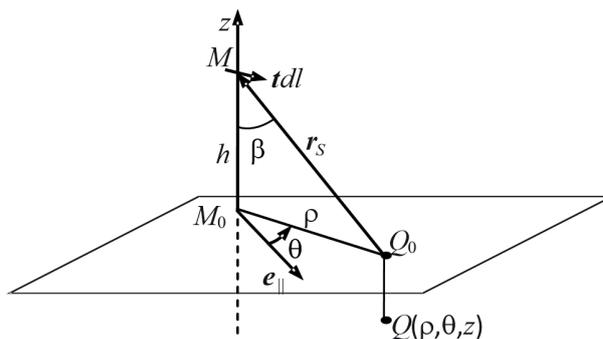


Рис. 2. Геометрические параметры для определения значений напряженностей электромагнитного поля в точке $Q(\rho, \theta, z)$ в электропроводном полупространстве $z < 0$.

Выражение для напряженности магнитного поля \dot{H}_i в электропроводном полупространстве следует из уравнения Максвелла $\nabla \times \dot{E} = -i\omega\mu\mu_0 \dot{H}$

$$\dot{H}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi\mu} \oint_l \left[t_{\parallel} \left[e_z \sin \theta \frac{\partial T_1}{\partial \rho} + [e_{\parallel} \times e_z] \frac{\partial T_1}{\partial z} \right] - (t \cdot e_z) e_{\theta} \frac{\partial T_2}{\partial z} \right] dl. \quad (3)$$

Как следует из (1), проекция напряженности электрического поля на направление, перпендикулярное плоской границе раздела сред, всегда равна нулю $\dot{E}_i \cdot e_z = 0$. С другой стороны, в этой среде все компоненты напряженности магнитного поля в общем случае могут иметь ненулевые значения.

Для исследования других общих особенностей формирования электромагнитного поля, связанных с проникновением неоднородного поля в проводящее полупространство, целесообразно ввести безразмерные параметры, значения которых обусловлены видом выражений (2). В этом случае используем безразмерную переменную интегрирования $\chi = g\rho/\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}$ и учтем,

что $pz = \sqrt{2i} \frac{z}{\delta}$, где $\delta = 1/\text{Re}(p) = \sqrt{2/(\omega\mu\mu_0\gamma)}$ – глубина проникновения однородного поля в электропроводное полупространство [24]. В результате функции $T_1(\rho, \theta, z) = \frac{P}{\mu} f_1\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right)$ и $T_2(\rho, \theta, z) = \frac{P}{\mu} f_2\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right)$ будут выражены через безразмерные параметры, где

$$f_1\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) = \int_0^\infty K\left(\frac{z}{\delta}, \chi\right) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\chi \cos \beta}{\varepsilon}\right) J_0\left(\frac{\chi \sin \beta}{\varepsilon}\right)}{w_1(\chi)} \chi d\chi, \quad (4)$$

$$f_2\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) = \int_0^\infty K\left(\frac{z}{\delta}, \chi\right) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\chi \cos \beta}{\varepsilon}\right) J_1\left(\frac{\chi \sin \beta}{\varepsilon}\right)}{w_1(\chi)} \chi d\chi,$$

$$K\left(\frac{z}{\delta}, \chi\right) = \exp(qz) = \exp\left[\sqrt{2i} \frac{z}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}\right], \quad (5)$$

здесь параметр $\varepsilon = \mu\delta/\sqrt{2}r_S$ пропорционален отношению глубины проникновения δ к расстоянию r_S от источника поля в точке M на контуре до поверхности тела в точке Q_0 (рис. 2). Знаменатель $w_1(\chi)$ в подынтегральных выражениях (4) записывается как

$$w_1(\chi) = \frac{\chi}{\sqrt{i}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}. \quad (6)$$

Выражения (1) и (3) описывают проникновение электромагнитного поля произвольного контура с током в проводящее полупространство и в общем случае они отличаются от приближенного описания проникновения однородного поля. Обычно в приближенных моделях исходной величиной выступает тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на границе \dot{H}_τ , локальное значение которой для тела произвольной формы находится из решения внешней задачи в предположении идеального скин-эффекта $\delta \rightarrow 0$ [11]. За величину однородного поля принимается локальное значение \dot{H}_τ на поверхности тела. Его проникновение в электропроводное полупространство описывается известным распределением напряженностей электрического \dot{E}_i и магнитного \dot{H}_i полей: $\dot{E}_i = \dot{E}_\tau e^{-pz}$, $\dot{H}_i = \dot{H}_\tau e^{-pz}$ [24]. Векторы поля связаны приближенным импедансным граничным условием Леонтовича $\dot{E}_\tau = \zeta[\mathbf{e}_z \times \dot{H}_\tau]$, где поверхностный импеданс $\zeta = \sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}/\gamma$ в данном случае связывает значения векторов поля \dot{E}_τ , \dot{H}_τ не только на поверхности раздела диэлектрической и электропроводной сред, но и во всем электропроводном полупространстве \dot{E}_i , \dot{H}_i . В общем случае проникновения неоднородного электромагнитного поля выражения (1) и (3) показывают отличие как от значений напряженностей электрического \dot{E}_τ и магнитного \dot{H}_τ полей на граничной поверхности при идеальном скин-эффекте, так и закона их затухания в зависимости от координаты z .

Электромагнитное поле в диэлектрическом полупространстве. Выражения для напряженностей электрического \dot{E}_e и магнитного \dot{H}_e полей в диэлектрическом полупространстве, где расположен контур с током, определяются единственной функцией G_e [21]

$$\dot{E}_e = \dot{E}_{e1} + \dot{E}_{e2} + \dot{E}_{e3} = -i\omega \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint_l \left(\frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla G_e] \right) dl, \quad (7)$$

$$\dot{H}_e = \dot{H}_{e1} + \dot{H}_{e2} + \dot{H}_{e3} = -\frac{I_0}{4\pi} \oint_l \left[\frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} - \mathbf{t}_1 \times \nabla \left(\frac{\partial G_e}{\partial z} \right) \right] dl, \quad (8)$$

где, используя безразмерные величины, функция G_e определяется следующим несобственным интегралом

$$G_e = \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\chi \cos \beta_1}{\varepsilon_1}\right) J_0\left(\frac{\chi \sin \beta_1}{\varepsilon_1}\right)}{w_1(\chi)} d\chi. \quad (9)$$

Геометрические параметры, которые входят в выражения (7) – (9), показаны на рис. 3. Элементы tdl исходного контура и t_1dl контура, зеркального отраженного от границы раздела сред, расположены в точках M и M_1 соответственно. Проекция касательных векторов на вертикальную ось равны по модулю и противоположны по направлению ($t_{1z} = -t_z$), а проекции t_{\parallel} и t_{\parallel} на плоскую границу раздела сред равны по длине и направлению $t_{\parallel} = t_{\parallel}$, т.е. $\mathbf{t} = t_{\parallel} + t_z$, $\mathbf{t}_1 = t_{\parallel} + t_{1z} = t_{\parallel} - t_z$. Векторы $\mathbf{r} = (z_M - z)\mathbf{e}_z + \rho$ и $\mathbf{r}_1 = (z_{M1} - z)\mathbf{e}_z + \rho = -(z_M + z)\mathbf{e}_z + \rho$ (вектор ρ – проекция вектора \mathbf{r} или вектора \mathbf{r}_1 на граничную поверхность) определяют положения точек M и M_1 относительно точки наблюдения Q . Угол β_1 показывает ориентацию вектора \mathbf{r}_1 относительно вертикальной оси. Параметр $\varepsilon_1 = \mu\delta/(\sqrt{2}r_1)$ связан с расстоянием r_1 между точками M_1 и Q .

Первое и второе слагаемые в (7) и (8) описывают решение задачи для идеального скин-эффекта при $\delta \rightarrow 0$ [20]. Когда глубина проникновения отлична от нуля, влияние электрофизических свойств среды учитывается третьим слагаемым.

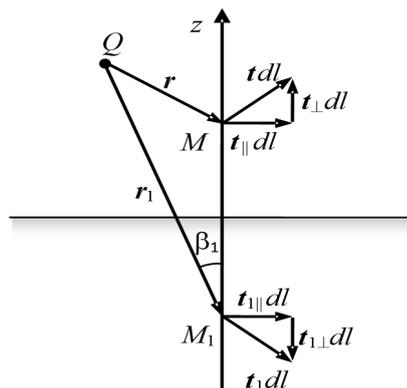


Рис. 3. Положение элемента контура tdl и его зеркального отражения t_1dl относительно точки наблюдения Q

Электромагнитное поле (7), (8) в произвольной точке диэлектрического полупространства создается всеми источниками, включая ток исходного контура, вихревые токи в электропроводной среде, источники намагничивания среды и электрические заряды на поверхности раздела сред. Можно говорить, что это суммарное поле затухает от значения на поверхности

раздела сред при его диффузии в электропроводное тело. Наличие третьего слагаемого в (7) и (8) определяет отличие касательных компонент напряженностей полей на поверхности от их значений $\dot{E}_\tau, \dot{H}_\tau$, которые соответствуют полю в приближенной модели идеального скин-эффекта.

Общая особенность затухания неоднородного электромагнитного поля в проводящем полупространстве. Наличие точного решения общей задачи позволяет вначале провести анализ особенностей проникновения неоднородного поля в электропроводное полупространство без ограничений на значения электрофизических параметров и частоту поля.

Как следует из (2) и (4), распределение любой компоненты напряженностей электрического и магнитного полей в поверхностном слое электропроводного полупространства в зависимости от координаты z связано с наличием в подынтегральных выражениях экспоненциальной функции $K(z/\delta, \chi)$ (5). Множитель $\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}$ в показателе экспоненты определяет закон затухания поля. Если влияние второго слагаемого $[\chi/(\mu\sqrt{i})]^2$ отсутствует, то затухание соответствует закону затухания однородного поля. Однако поскольку $\text{Re}\left(\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}\right) > 1$, то затухание неоднородного электромагнитного поля, созданного контуром с током, происходит всегда быстрее, чем однородного поля. С учетом принципа суперпозиции этот вывод будет справедливым для любой системы исходных замкнутых контуров и поэтому справедлив в общем случае произвольного внешнего поля.

Таким образом, более быстрое затухание неоднородного электромагнитного поля по сравнению с однородным полем является общей особенностью формирования электромагнитного поля при его диффузии в проводящее полупространство. Качественное пояснение найденной особенности может основываться на анализе формирования неоднородного поля при действии «стандартных» внешних источников и является предметом дополнительного исследования.

Рассмотрим влияние параметра ε на закон затухания поля, т.е. влияние расстояния между источниками внешнего поля и поверхностью тела по сравнению с глубиной проникновения (при $\mu = 1$). Параметр ε характеризует и неоднородность поля поскольку, чем ближе к поверхности расположен контур с током, тем более неоднородным является поле у его поверхности. Количественно это отражается во влиянии величины ε на зависимости в (4) функций $f_1(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ и $f_2(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ от координаты z .

Пусть, например, источники внешнего поля удалены на значительное расстояние от поверхности электропроводного тела и соответственно для всех точек контура $\varepsilon \ll 1$. В этом случае в выражениях (4) из-за наличия экспоненциальной функции $\exp(-\chi \cos \beta / \varepsilon)$ уже при $\chi \cos \beta > \varepsilon$ величина подынтегральных выражений оказывается незначительной. То есть величина несобственных интегралов (4) при малых ε определяется в

основном поведением подынтегральной функции вблизи нижнего предела интегрирования $\chi = 0$. Это означает, что при интегрировании в (4) влияние множителя $\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}$ будет слабо отличаться от случая, когда этот множитель равен единице. Следовательно, если $\varepsilon \ll 1$, то затухание поля от его локального значения на поверхности в точке Q_0 будет близким к затуханию однородного поля.

Если параметр ε не является малым, отличие множителя $\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}$ от единицы проявляется значительно сильнее. В этом случае элементы контура как источника внешнего поля расположены ближе к поверхности раздела сред и затухание поля будет происходить по другому закону с более сильным затуханием.

Проиллюстрируем сделанный общий вывод на конкретном примере затухания трехмерного поля в случае, когда глубина проникновения $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\gamma)}$ сравнима с размерами контура. Дополнительным аргументом справедливости вывода может служить также сравнение результатов расчета затухания неоднородного электромагнитного поля, выполненных по полученным аналитическим выражениям и с использованием численного метода в пакете Comsol [22].

Расчет выполнен для кругового контура, расположенного в плоскости, перпендикулярной к плоской поверхности раздела сред, как показано на рис. 4. Радиус контура $R=0,05$ м, минимальное расстояние от контура до поверхности раздела сред $h_0=0,02$ м, электрофизические свойства среды следующие: $\mu = 1$, $\gamma = 10^5$ 1/(Ом·м). В отличие от аналитического метода в численном расчете контур с током выбирался в виде проводника квадратной формы сечения $2r \times 2r$ при $r = 0,004$ м. В численном расчете задача решалась в ограниченной области, размеры которой значительно превышают радиус контура R . Разные значения глубины проникновения поля и соответственно значения отношения δ/R или $\varepsilon_m = \max(\varepsilon) = \mu\delta/\sqrt{2}h_0$ получены выбором частоты поля.

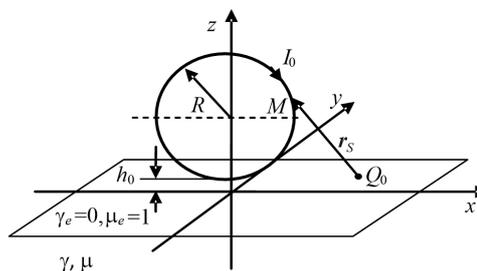


Рис. 4. Электромагнитная система с круговым токовым контуром, расположенным в плоскости, перпендикулярной к поверхности раздела сред

Результаты расчета напряженностей электрического и магнитного полей показаны на рис. 5, а-с.

В верхней группе рисунков стрелками показано распределение вектора плотности индуцированного тока $\mathbf{j}_i = \gamma \mathbf{E}_i$ в вертикальной плоскости, которая проходит через центр контура с током. Расчеты выполне-

ны численным методом, и они подтверждают теоретический вывод о нулевом значении вертикальных компонент напряженности электрического поля и плотности тока. Кривые на рисунках ниже показывают изменение по глубине амплитуды напряженности электрического поля, нормированной на значение поля у поверхности $E_x^* = |\dot{E}_x|/|\dot{E}_x(z=0)|$. Значение координаты z в электропроводной среде нормировано на величину глубины проникновения поля δ . Пунктирные линии показывают затухание однородного поля. Сплошные линии соответствуют аналитическому

расчету, отдельные точки, отмеченные квадратиками, соответствуют результатам численного расчета. Нижний ряд рисунков показывает аналогичные зависимости для разных компонент напряженности магнитного поля, также нормированных на амплитудные значения соответствующих компонент поля у поверхности электропроводной среды $H_k^* = |\dot{H}_{ik}|/|\dot{H}_{ik}(z=0)|$, где $k = x, y, z$. Отметим, что в отличие от электрического поля вертикальная компонента напряженности магнитного поля в электропроводном полупространстве в данном случае трехмерного поля не равна нулю.

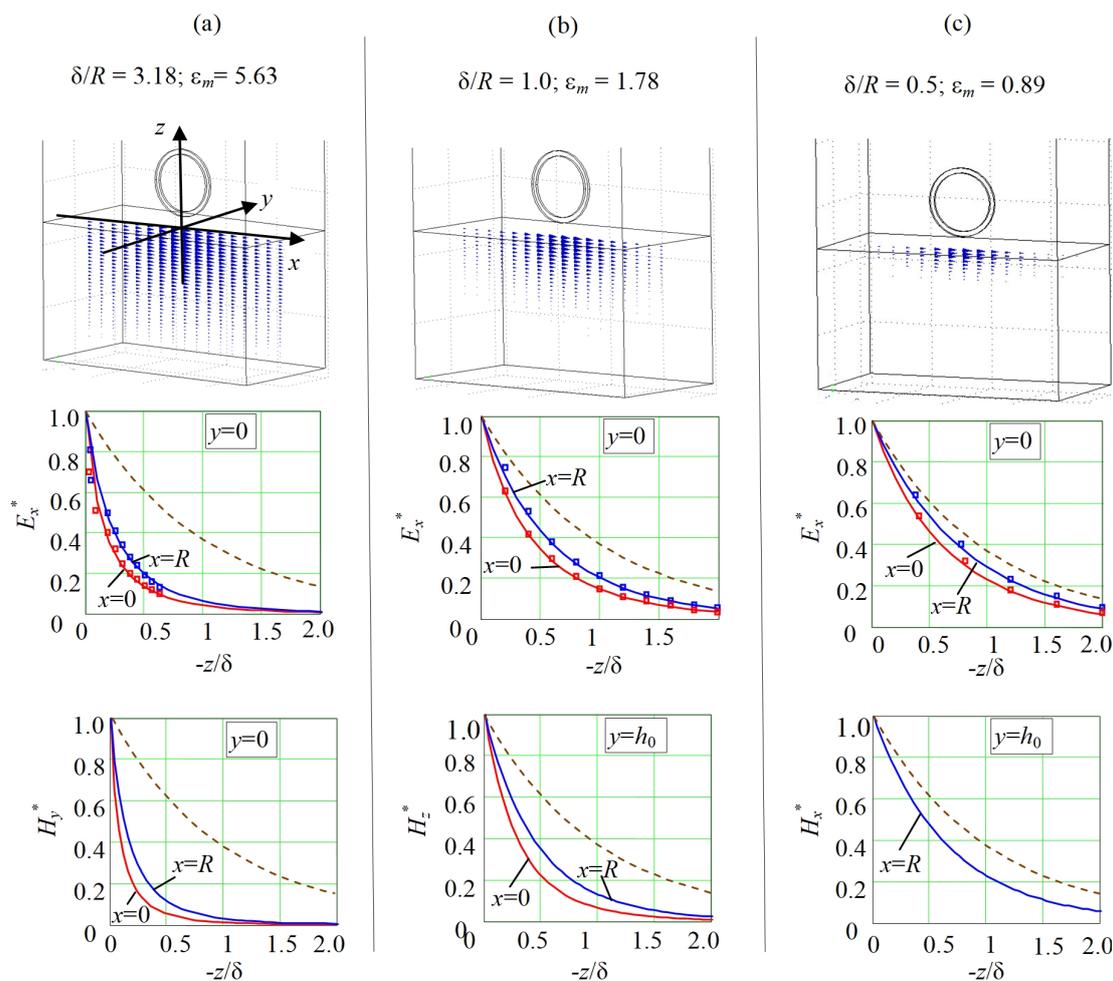


Рис. 5. Распределение по глубине нормированных амплитуд составляющих напряженностей электрического E_x^* и магнитного H_x^* , H_y^* , H_z^* полей в электропроводном полупространстве для неоднородного трехмерного поля, созданного конкретной системой в виде кругового контура с током вблизи плоской границы раздела сред

Видно, что с уменьшением глубины проникновения δ по сравнению с радиусом контура R или с расстоянием h_0 затухание как электрического, так и магнитного поля приближаются к максимально медленному затуханию однородного поля. Непосредственно под контуром при $x = 0, y = 0$, где участок контура расположен наиболее близко к поверхности, затухание проявляется сильнее, чем при $x = R$. Это объясняется тем, что при $x = R$ участки контура находятся на большем расстоянии от поверхности, и поэтому неравномерность распределения внешнего поля у поверхности меньше, чем в случае, когда $x = 0$.

Пунктирная кривая на рис. 5, *b* для магнитного поля имеет условный смысл, поскольку в приближенной модели диффузии однородного поля нормальная к поверхности компонента напряженности магнитного поля равна нулю. Однако при диффузии трехмерного неоднородного поля эта компонента отлична от нуля.

Для рассчитываемой системы в плоскости $x = 0$ компонента поля H_x равна нулю и поэтому на рис. 5, *c* соответствующая кривая отсутствует.

Проникновение неоднородного электромагнитного поля в случае сильного скин-эффекта. Общая особенность более быстрого затухания неоднородного

родного поля по сравнению с однородным является основанием для анализа затухания поля, когда введенный параметр является малой величиной $\varepsilon < 1$, не обязательно стремящейся к нулю. Этот параметр зависит от положения точки истока M на контуре. В данном разделе рассматриваются произвольные электромагнитные системы, для которых максимальное значение $\varepsilon_m = \max(\varepsilon)$ из всех ε является малым параметром.

Сравнение затухания неоднородного и однородного полей. Для подтверждения приближения закона затухания неоднородного поля к закону затухания однородного проведем сравнение функций $f_1(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ и $f_2(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ с учетом множителя $\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}$ в показателе экспоненты и теми же функциями $f_{10}(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ и $f_{20}(z/\delta, \varepsilon, \beta)$, но при условии, что множитель принят равным единице, что соответствует затуханию однородного поля. Для напряженности электрического поля эти функции определяют вклад в величину контурного интеграла участков контура с направлениями тока, параллельным и перпендикулярным к поверхности раздела сред. Для напряженности магнитного поля аналогично могут быть рассмотрены соответствующие функции, которые вытекают из (3).

Рассмотрим вначале характер изменения функций $f_1(0, \varepsilon, \beta)$ и $f_2(0, \varepsilon, \beta)$ в зависимости от положения точки Q на поверхности раздела сред ($z = 0$). На рис. 6 показаны зависимости модулей этих функций от величины $\rho/h = \operatorname{tg}\beta$ при $\mu = 1$ и разных значениях малого параметра $\varepsilon < 1$.

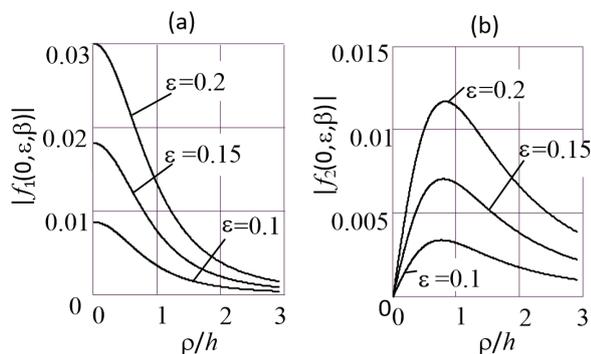


Рис. 6. Изменение модулей функций $|f_1(0, \varepsilon, \beta)|$ и $|f_2(0, \varepsilon, \beta)|$ на поверхности раздела сред в зависимости от относительного расстояния $\rho/h = \operatorname{tg}\beta$ для малых значений параметра $\varepsilon < 1$ и $\mu = 1$

Видно, что участки с различным направлением тока по-разному участвуют в создании тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на поверхности тела. Горизонтальная компонента тока дает наибольший вклад непосредственно под элементом тока в направлении, совпадающем с направлением тока. Наибольший вклад от вертикальной компоненты тока реализуется на определенном расстоянии от точки M_0 в радиальном направлении при расстоянии ρ , примерно равном высоте расположения элемента контура.

Кривые на рис. 7,а показывают изменение по глубине модулей функций, соответствующих влиянию направления тока на участках контура, параллельных границе раздела сред при $\mu = 1$: сплошные

линии соответствуют функции $|f_1(z/\delta, \varepsilon, \beta)|$, пунктирные линии соответствуют функциям $|f_{10}(z/\delta, \varepsilon, \beta)|$. Результаты приведены для случая $\beta = 0$, где, как видно из рис. 6,а, функция $|f_1(0, \varepsilon, \beta)|$ на поверхности принимает наибольшее значение. Кривые для разных значений малого параметра ε получены выбором соответствующих значений высоты h над поверхностью, на которой расположен элемент контура. Сравнение подтверждает утверждение о незначительном влиянии функциональной зависимости от переменной интегрирования множителя в аргументе экспоненциальной функции. Количественные значения отклонения, которые возникают при замене множителя $\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}$ единицей, показаны на рис. 7,б в виде относительной величины отклонения $\Delta_1 = ||f_1| - |f_{10}||/|f_1|$.

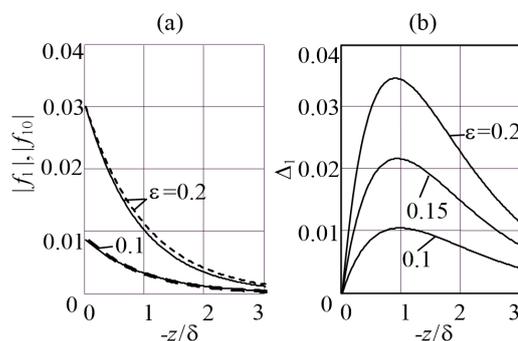


Рис. 7. Сравнение затухания неоднородного и однородного полей для функций f_1 и f_{10} , соответствующих направлению тока, параллельного границе раздела сред, при малой величине параметра $\varepsilon < 1$ и $\mu = 1$

Аналогичные результаты справедливы и для слагаемого подынтегральной функции в контурном интеграле (1), связанного с вертикальной компонентой направления тока. Сравнительные значения функций $f_2(z/\delta, \varepsilon, \beta)$, $f_{20}(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ и величина их относительного отклонения $\Delta_2 = ||f_2| - |f_{20}||/|f_2|$ представлены на рис. 8. В данном случае точка наблюдения выбрана вблизи максимального значения $|f_2(0, \varepsilon, \beta)|$ на поверхности раздела сред при $\rho = h$, ($\beta = \pi/4$).

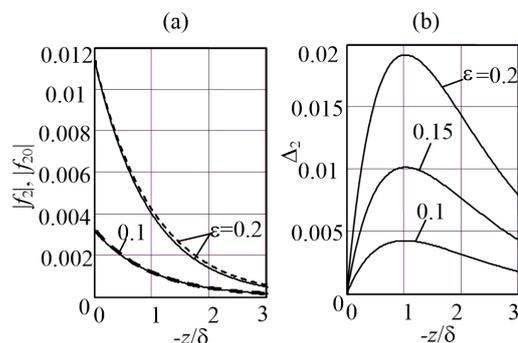


Рис. 8. Сравнение затухания неоднородного и однородного полей для функций f_2 и f_{20} , соответствующих направлению тока, перпендикулярного границе раздела сред, при малой величине параметра $\varepsilon < 1$ и $\mu = 1$

Из представленных расчетов видно, что с уменьшением величины малого параметра ε ошибка от замены множителя в экспоненте единицей быстро падает, примерно обратно пропорционально ε^2 .

Аналогичные результаты оказываются справедливыми и для напряженности магнитного поля.

Отсюда можно сделать следующий вывод. При сильном скин-эффекте, когда максимальное значение введенного параметра ε_m является малой величиной, напряженности электрического и магнитного полей затухают от локального значения на поверхности приближенно по закону проникновения однородного поля. Так как закон затухания электромагнитного поля зависит от величины параметра ε_m , то понятие сильного скин-эффекта можно расширить с точки зрения возможности использовать при этом закон затухания однородного поля. Сильным можно считать скин-эффект, при котором глубина проникновения поля является малой величиной по сравнению с характерными размерами не только электропроводного тела, но и всей электромагнитной системы, включая расстояния от источников внешнего поля до граничной поверхности тела.

С учетом граничных условий ($z=0: \dot{E}_{e\parallel} = \dot{E}_{i\parallel}, \dot{H}_{e\parallel} = \dot{H}_{i\parallel}, \dot{H}_{e\perp}/\mu = \dot{H}_{i\perp}$) и выражений для напряженностей полей в диэлектрическом полупространстве (7) – (9) приближенные выражения в электропроводном полупространстве принимают следующий вид:

$$\dot{E}_i \approx e^{pz} \dot{E}_i(z=0) = e^{pz} \dot{E}_{e\parallel}(z=0) = e^{pz} i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla G_e]_{z=0} dl, \quad (10)$$

$$\dot{H}_i \approx e^{pz} \dot{H}_i(z=0) = e^{pz} [\dot{H}_{e\parallel}(z=0) + \dot{H}_{e\perp}(z=0)/\mu], \quad (11)$$

где компоненты напряженности магнитного поля на поверхности диэлектрика есть

$$\dot{H}_{e\parallel}(z=0) = \dot{H}_{e1}(z=0) + \dot{H}_{e2}(z=0) + \frac{\dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left\{ [\mathbf{t}_1 \times \mathbf{e}_z] \frac{\partial^2 G_e}{\partial z^2} - \mathbf{t}_1 \times \nabla \left(\frac{\partial G_e}{\partial z} \right) \right\} dl, \quad (12)$$

$$\dot{H}_{e\perp}(z=0) = \frac{\dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \mathbf{t}_1 \times \left\{ \nabla \left(\frac{\partial G_e}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 G_e}{\partial z^2} \mathbf{e}_z \right\} dl.$$

Выражения (10) – (12), представленные в виде двух сомножителей, являются приближенными только в отношении зависимости от координаты z . На поверхности при $z=0$ они учитывают неоднородный характер электромагнитного поля и дают значения напряженностей полей без ограничений на величину параметра $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Введенное расширенное понятие сильного скин-эффекта предполагает ответы на следующие два вопроса. Во-первых, как на границе раздела сред отличаются значения напряженностей неоднородного поля $\dot{E}_i(z=0)$ и $\dot{H}_i(z=0)$ в (10) – (12) от значений касательных составляющих \dot{E}_τ и \dot{H}_τ для модели идеального скин-эффекта. Во-вторых, какова ошибка замены закона затухания неоднородного поля законом затухания однородного в зависимости от величины малого параметра.

Неоднородное электромагнитное поле на границе раздела сред. При малых значениях ε_1 в произ-

вольной точке диэлектрического полупространства выражения (10) – (12) можно упростить, используя разложение функции G_e в асимптотический ряд по малому параметру. В произвольной точке диэлектрического полупространства, в том числе и на границе раздела сред, асимптотический ряд, ограниченный определенным количеством членов N , имеет следующий вид [25]:

$$G_e \approx \sum_{n=0}^N G_n = \sum_{n=0}^N \frac{2}{\sqrt{i}} a_n(\mu) \int_0^\infty \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}} \right)^n \exp\left(-\frac{\chi \cos \beta_1}{\varepsilon_1}\right) J_0\left(\frac{\chi \sin \beta_1}{\varepsilon_1}\right) d\chi = \quad (13)$$

$$= \sum_{n=0}^N 2(-1)^n a_n(\mu) \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{i}} \right)^{n+1} r_1^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r_1} \right),$$

где $a_n(\mu)$ – коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции $1/w_1 = \sum_{n=0}^\infty a_n(\mu) (\chi/\sqrt{i})^n$.

Применение асимптотического разложения (13) для напряженностей полей (1), (3) или (7), (8) на поверхности позволяет найти приближенные значения поля на границе и установить ряд общих особенностей его формирования. Вывод соответствующих соотношений приведен в [23].

Во-первых, в найденных аналитических выражениях электромагнитное поле на поверхности определяется только известным распределением поля внешних источников у границы

$$\dot{E}_{\parallel}(z=0) = \sum_{n=0}^N \dot{E}_{\parallel n} = \zeta \sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p} \right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \dot{H}_{0\parallel} \right\} \Big|_{z=0}; \quad (14)$$

$$\dot{H}_{\parallel}(z=0) = \sum_{n=0}^{N+1} \dot{H}_{\parallel n} = - \sum_{n=0}^{N+1} 2a_{n-1}(\mu) \left(\frac{\mu}{p} \right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \dot{H}_{0\parallel} \right\} \Big|_{z=0}; \quad (15)$$

$$\dot{H}_{i\perp}(z=0) = \sum_{n=0}^N \dot{H}_{i\perp n} = - \sum_{n=0}^N 2 \frac{a_n(\mu)}{\mu} \left(\frac{\mu}{p} \right)^{n+1} \left\{ \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \dot{H}_{0\perp} \right\} \Big|_{z=0}, \quad (16)$$

здесь учтено, что $\varepsilon_1 r_1 / \sqrt{i} = \mu/p$; принято, что $a_{-1} = -1$;

\dot{H}_0 – напряженность магнитного поля внешних источников в диэлектрической среде на поверхности раздела сред. Если внешнее поле создается единственным контуром с током, то

$$\dot{H}_0 = - \frac{\dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl. \quad (17)$$

Из (14) – (16) видно, что электромагнитное поле определяется не только его локальным значением на поверхности, которое соответствует $n=0$. Оно зависит также от производных поля по координате, то есть от неоднородности внешнего поля у границы раздела сред. В этом отношении электромагнитное поле на границе отличается от значений \dot{E}_τ и \dot{H}_τ в модели идеального скин-эффекта. Отличие связано с полем вихревых токов в электропроводной среде, закон распределения которых зависит от степени удаленности источников внешнего поля по сравнению с глубиной проникновения поля. Нормальная к границе компонента напряженности магнитного поля, которая отсутствует в приближенной модели, определяется только производными по координате z от той же компоненты внешнего поля.

Во-вторых, найденные выражения (14) – (16) позволяют обобщить импеданное граничное условие Леонтовича на случай проникновения в электропроводную среду неоднородного электромагнитного поля. Импеданное граничное условие, которое связывает касательные к поверхности компоненты напряженностей электрического и магнитного полей, для отдельных членов асимптотического ряда принимает следующий вид:

$$a_{n-1}(\mu)\dot{\mathbf{E}}_{\parallel n} = -a_n(\mu)\boldsymbol{\varepsilon}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{\parallel n}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что приближенное импеданное граничное условие Леонтовича справедливо только для первых двух членов разложения в асимптотический ряд. Нарушение имеет место, начиная с $n = 2$ (ε^2), для которого (18) дает $\dot{\mathbf{E}}_{\parallel 2} = \left[1 - 1/(2\mu^2)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{\parallel 2}$. Выполнение предположения в приближенной модели о равенстве нулю нормальной к поверхности компоненты напряженности магнитного поля является более жестким. Оно выполняется только для нулевого члена разложения в асимптотический ряд и нарушается уже при ε^1 .

Влияние величины малого параметра на закон проникновения поля при сильном скин-эффекте. Выполним количественную оценку влияния неоднородности электромагнитного поля на закон его затухания в зависимости от величины малого параметра ε . Анализ проведем, основываясь на разложении выражений в асимптотический ряд, в котором при малом ε применяется разложение в ряд Тейлора множителя подинтегральной функции вблизи нулевого значения переменной интегрирования χ .

Отличие от (9) для асимптотического разложения несобственных интегралов (4) необходимо использовать не только разложение в степенной ряд функции $w_1^{-1}(\chi)$, но и разложение экспоненциальной функции (5). Учитывая кроме единицы еще один член разложения множителя $\sqrt{1 + [\chi/(\mu\sqrt{i})]^2}$, приближенное выражение для экспоненциальной функции (5) будет следующим:

$$\exp\left(\sqrt{2i}\frac{z}{\delta}\sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}\right) \approx \left[1 + \sqrt{2i}\frac{z}{\delta} \cdot \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^2\right] \exp\left(\sqrt{2i}\frac{z}{\delta}\right), \quad (19)$$

где считается, что отношение z/δ не превышает нескольких единиц.

С учетом (19) функции $f_1(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ и $f_2(z/\delta, \varepsilon, \beta)$ в (4) можно приближенно представить в виде (ниже используется обозначение $f_{1,2}(z/\delta, \varepsilon, \beta)$, объединяющее две функции)

$$f_{1,2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon, \beta\right) \approx \exp\left(\sqrt{2i}\frac{z}{\delta}\right) \left[f_{1,2}(0, \varepsilon, \beta) + \sqrt{2i}\frac{z}{\delta} \cdot \frac{1}{2\mu^2} k_{1,2}(0, \varepsilon, \beta) \right], \quad (20)$$

где $k_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$ отличаются от $f_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$ наличием множителя $(\chi/\sqrt{i})^2$ в подинтегральных выражениях (4).

После подстановки $1/w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu)(\chi/\sqrt{i})^n$ функции $k_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$ и $f_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$ можно представить в виде разложения в асимптотические ряды, аналогично G_e в (15) при $z = 0$

$$\begin{cases} f_1(0, \varepsilon, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{1,n}, & f_2(0, \varepsilon, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{2,n}, \\ k_1(0, \varepsilon, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{1,n+2}, & k_2(0, \varepsilon, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{2,n+2}, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1,n} &= \int_0^{\infty} (\chi/\sqrt{i})^{n+1} \exp\left(-\frac{\chi \cos \beta}{\varepsilon}\right) J_0\left(\frac{\chi \sin \beta}{\varepsilon}\right) d\chi, \\ f_{2,n} &= \int_0^{\infty} (\chi/\sqrt{i})^{n+1} \exp\left(-\frac{\chi \cos \beta}{\varepsilon}\right) J_1\left(\frac{\chi \sin \beta}{\varepsilon}\right) d\chi. \end{aligned} \quad (22)$$

Для получения окончательных выражений достаточно воспользоваться выражениями (14) – (16) разложения в асимптотический ряд напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела сред. При этом для дополнительного слагаемого, содержащего $k_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$, будут справедливы те же выражения, в которых значения степени функций и производных изменятся с n на $n+2$. Кроме того, так как в (20) в дополнение к единице учтен только один член ряда, то и функции $k_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$ должны содержать только один член разложения. С той же точностью по параметру ε функции $f_{1,2}(0, \varepsilon, \beta)$ могут содержать не более трех членов ряда. В результате, используя представление напряженности электрического поля на границе раздела сред (14), выражение, в котором учитывается отличие от единицы множителя в экспоненциальной функции, примет вид

$$\dot{\mathbf{E}}_i \approx 2e^{pz} \boldsymbol{\varepsilon}_z \times \left\{ \begin{aligned} &\dot{\mathbf{H}}_{0\parallel} - \frac{\mu}{p} \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2\mu^2}\right) \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \\ &+ \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \frac{pz}{2\mu^2} \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Аналогично, используя значения компонент напряженности магнитного поля на границе (15), (16) и разложение экспоненциальной функции (19), запишем также приближенные выражения для затухания напряженности неоднородного магнитного поля

$$\dot{\mathbf{H}}_{i\parallel} \approx 2e^{pz} \left\{ \begin{aligned} &\dot{\mathbf{H}}_{0\parallel} - \frac{\mu}{p} \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2\mu^2}\right) \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \\ &+ \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \frac{pz}{2\mu^2} \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{i\perp} \approx -\frac{2}{p} e^{pz} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{\mu}{p} \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2\mu^2}\right) \frac{\partial^3 \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}}{\partial z^3} \Big|_{z=0} + \\ &+ \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \frac{pz}{2\mu^2} \frac{\partial^3 \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Для компонент электромагнитного поля $\dot{\mathbf{E}}_{i\parallel} = \dot{\mathbf{E}}_i$ и $\dot{\mathbf{H}}_{i\parallel}$, направленных параллельно границе раздела сред, отклонение от закона затухания однородного поля имеет место в членах разложения, пропорциональных второй производной от величины поля у поверхности. Отклонение для перпендикулярной к поверхности компоненты напряженности магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_{i\perp}$ имеет место для члена разложения, пропорционального производной третьего порядка. Это

связано с тем, что нормальная компонента на поверхности раздела сред определяется выражением (18), в котором отсутствует локальное значение поля и которое уже содержит общий множитель, пропорциональный величине ε .

Как следует из (23) – (25), отклонение закона затухания неоднородного электромагнитного поля в электропроводной среде от закона затухания однородного поля проявляется при учете малого параметра во второй степени ε^2 . Этот вывод соответствует результатам расчета, показанным на рис. 7,б и 8,б. Кроме того, из (23) – (25) вытекает, что при изменении z максимальное значение модуля дополнительного учитываемого слагаемого достигается при максимальном значении функции $|pz \exp(pz)| = \left| \left(\sqrt{2z/\delta} \right) \exp(z/\delta) \right|$. Максимум будет иметь место при $-z = \delta$. Такое значение также хорошо согласуется с отношением z/δ на рис. 7,б и 8,б, где отклонение достигает максимальной величины.

Как видно из (23) – (25), для всех компонент электромагнитного поля при сильном скин-эффекте отклонение закона затухания неоднородного электромагнитного поля от закона затухания однородного определяется величиной одного и того же параметра

$$\left(\frac{\mu}{p} \right)^2 \frac{pz}{2\mu^2} \sim \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^2 \frac{z}{\delta}. \quad (26)$$

Оценка (26) учитывает только различие между законами проникновения поля. Суммарная относительная ошибка, связанная с использованием модели идеального скин-эффекта, будет значительно больше, поскольку в этой модели не учитывается также неоднородность поля у поверхности раздела сред.

Выводы.

Точное аналитическое решение трехмерной задачи квазистационарного электромагнитного поля в системе «контур с током произвольной конфигурации – электропроводное полупространство» позволяет получить некоторые общие обоснованные следствия по формированию поля. Такими следствиями, рассмотренными в статье, являются следующие.

1. Установлено, что неоднородное электромагнитное поле при проникновении в электропроводное полупространство затухает с глубиной всегда быстрее, чем однородное поле. Количественной характеристикой скорости затухания поля можно считать параметр, пропорциональный отношению глубины проникновения однородного поля к расстоянию от внешних источников до поверхности раздела сред. С уменьшением этого параметра скорость затухания поля также уменьшается, стремясь к наиболее медленному затуханию однородного электромагнитного поля, когда количественный параметр стремится к нулю.

2. С точки зрения приближения закона затухания неоднородного поля к закону затухания однородного поля понятие сильного скин-эффекта можно расширить. Сильным можно считать скин-эффект, при котором глубина проникновения поля является малой величиной по сравнению с характерными размерами не только электропроводного тела, но и всей электромагнитной системы, включая расстояния от источни-

ков внешнего поля до граничной поверхности тела. При этом введенный количественный параметр является малой величиной.

3. При сильном скин-эффекте в его расширенной трактовке неоднородность электромагнитного поля влияет как на значения напряженностей поля на поверхности раздела сред, так и на закон затухания поля в электропроводном теле. Влияние неоднородности поля у граничной поверхности проявляется в том, что напряженности электрического и магнитного полей помимо локальных значений содержат производные поля внешних источников по координате, перпендикулярной к поверхности раздела сред. Явные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей в виде разложения в асимптотические ряды позволяют обобщить импеданское граничное условие Леонтовича на диффузию неоднородного поля в электропроводное полупространство. Математическая модель проникновения в электропроводную среду однородного поля для исследования проникновения неоднородного электромагнитного поля справедлива с точностью до введенного малого параметра в первой степени. В то же время использование экспоненциального убывания однородного поля от его значения на границе, определенного с учетом его неоднородности, справедливо с точностью до малого параметра уже во второй степени. Такое же ограничение справедливо и при использовании приближенного импедансного граничного условия Леонтовича.

Дальнейшее развитие теории возможно в направлении более общего описания неоднородного поля источников у поверхности раздела сред, не ограничиваясь внешними источниками в виде контуров с током. Формулировка краевых задач с учетом неоднородного поля на границе, которое, как показано, можно считать известным, имеет как теоретическое, так и практическое значение и также является предметом дальнейших исследований. Особенности распределения неоднородного электромагнитного поля на поверхности и в поверхностном слое электропроводного тела предполагают изучение его влияния на энергетические и силовые характеристики, распределение вектора Пойнтинга, максвелловского тензора натяжений.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. *Handbook of induction heating*. London, Taylor & Francis Ltd, 2017. 772 p. doi: <https://doi.org/10.1201/9781315117485>.
2. Lucía O., Maussion P., Dede E.J., Burdío J.M. Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, May 2014, vol. 61, no. 5, pp. 2509-2520. doi: <https://doi.org/10.1109/tie.2013.2281162>.
3. Acero J., Alonso R., Burdío J.M., Barragan L.A., Puyal D. Analytical equivalent impedance for a planar circular induction heating system. *IEEE Transactions on Magnetics*, Jan. 2006, vol. 42, no. 1, pp. 84-86. doi: <https://doi.org/10.1109/tmag.2005.854443>.
4. Babutskii A.I., Chrysanthou A., Ioannou J. Effect of pulsed electric current treatment on corrosion of structural metals. *Strength of Materials*, 2009, vol. 41, no. 4, pp. 387-391. doi: <https://doi.org/10.1007/s11223-009-9142-3>.

5. Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses. *International Journal of Fracture*, 2010, vol. 167, no. 2, pp. 183-193. doi: <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9543-0>.
6. Vasetsky Y.M., Kondratenko I.P. Electromagnetic field of the inductor for local electric pulse effects on metal products, *Technical Electrodynamics*, 2020, no 4, pp. 11-14. (Ukr). doi: <https://doi.org/10.15407/techned2020.04.011>.
7. Psyk V., Risch D., Kinsey B.L., Tekkaya A.E., Kleiner M. Electromagnetic forming – A review. *Journal of Materials Processing Technology*, 2011, vol. 211, iss. 5, pp. 787-829. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2010.12.012>.
8. Gayakwad D., Dargar M.K., Sharma P.K., Rajesh purohit, Rana R.S. A Review on Electromagnetic Forming Process. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 6, pp. 520-527. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.066>.
9. Batygin Y., Barbashova M., Sabokar O. *Electromagnetic Metal Forming for Advanced Processing Technologies*. Springer, Cham, 2018. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-74570-1>.
10. Yuferev S.V., Ida N. *Surface Impedance Boundary Conditions: A Comprehensive Approach*. CRC Press, 2010. 412 p. doi: <https://doi.org/10.1201/97811315219929>.
11. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Elsevier Ltd, 1984. 475 p. doi: <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-030275-1.50024-2>.
12. Knoepfel H. *Pulsed High Magnetic Fields*. Canada: John Wiley & Sons, Limited, 1997. 372 p.
13. Leontovich M.A. On the Approximate Boundary Conditions for Electromagnetic Field on the Surface of Highly Conducting Bodies. *Propagation of electromagnetic waves*, Moscow, USSR Academy of Sciences Publ., 1948, pp. 5-20 (Rus).
14. Rytov S.M. Calculation of skin effect by perturbation method. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1940, vol. 10, iss. 2, pp. 180-190. (Rus).
15. Mitzner K.M. An integral equation approach to scattering from a body of finite conductivity. *Radio Science*, 1967, vol. 2, iss. 12, pp. 1459-1470. doi: <https://doi.org/10.1002/rds19672121459>.
16. Kravchenko A.N. *Boundary Characteristics in Electrodynamics Problems*. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1989. 218 p. (Rus).
17. Fridman B.E. Skin effect in massive conductors used in pulsed electrical devices: I. Electromagnetic field of massive conductors. *Technical Physics*, 2002, vol. 47, no. 9, pp. 1112-1119. doi: <https://doi.org/10.1134/1.1508074>.
18. Berdnik S.L., Penkin D.Y., Katrich V.A., Penkin Y.M., Nesterenko M.V. Using the concept of surface impedance in problems of electrodynamics (75 years later). *Radio physics and radio astronomy*, 2014, vol. 19, no. 1, pp. 57-80. doi: <https://doi.org/10.15407/rpra19.01.057>.
19. Liu X., Yang F., Li M., Xu S. Generalized Boundary Conditions in Surface Electromagnetics: Fundamental Theorems and Surface Characterizations. *Applied Sciences*, 2019, vol. 9, no. 9, p. 1891. doi: <https://doi.org/10.3390/app9091891>.
20. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. An analytical calculation method of quasi-stationary three-dimensional electromagnetic field created by the arbitrary current contour that located near conducting body. *Technical Electrodynamics*, 2017, no 5, pp. 7-17. (Rus). doi: <https://doi.org/10.15407/techned2017.05.007>.
21. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. Three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field generated by arbitrary current contour near conducting body. *Technical Electrodynamics*, 2018, no 1, pp. 3-12. doi: <https://doi.org/10.15407/techned2018.01.003>.
22. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K., Kucheriava I.M., Mazurenko I.L. The penetration of nonuniform electromagnetic field of current contour in conducting medium. *Technical Electrodynamics*, 2018, no 5, pp. 11-14. (Ukr). doi: <https://doi.org/10.15407/techned2018.05.011>.
23. Vasetsky Yu. Nonuniform electromagnetic field at the interface between dielectric and conducting media. *Progress in Electromagnetics Research Letters*, 2020, vol. 92, pp. 101-107. doi: <https://doi.org/10.2528/PIERL20050802>.
24. Simonyi K. *Foundation of electrical engineering*. Elsevier Ltd, 1963. 865 p. doi: <https://doi.org/10.1016/c2013-0-02694-1>.
25. Vasetsky Yu., Mazurenko I., Dziuba K. Conditions for Application of Asymptotic Method to Electromagnetic Field Analysis in System of «a Current Loop – an Electroconducting Body». *Computational Problems of Electrical Engineering*, 2014, vol. 4, no. 1, pp. 91-96. Available at: <http://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2017/sep/6032/19.pdf> (accessed 20.12.2020).

Поступила (Received) 29.12.2020

Принята (Accepted) 03.02.2020

Опублікована (Published) 05.04.2021

Васецкий Юрий Макарович¹, д.т.н., проф.,

¹ Інститут електродинаміки
Національної академії наук України,
03057, Київ, пр. Перемоги, 56,
e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

Yu.M. Vasetsky¹, Doctor of Technical Science, Professor,

¹ Institute of Electrodynamics of the National Academy
of Sciences of Ukraine,
56, Peremohy Avenue, Kyiv, 03057, Ukraine.

Penetration of non-uniform electromagnetic field into conducting body.

The study is based on the exact analytical solution for the general conjugation problem of three-dimensional quasi-stationary field at a flat interface between dielectric and conducting media. It is determined that non-uniform electromagnetic field always decreases in depth faster than uniform field. The theoretical conclusion is confirmed by comparing the results of analytical and numerical calculations. The concept of strong skin effect is extended to the case when penetration depth is small not only compare to the characteristic body size, but also when the ratio of the penetration depth to the distance from the surface of body to the sources of the external field is small parameter. For strong skin effect in its extended interpretation, the influence of external field non-uniformity to electromagnetic field formation both at the interface between dielectric and conducting media and to the law of decrease field in conducting half-space is analyzed. It is shown, at the interface the expressions for the electric and magnetic intensities in the form of asymptotic series in addition to local field values of external sources contain their derivatives with respect to the coordinate perpendicular to the interface. The found expressions made it possible to generalize the approximate Leontovich impedance boundary condition for diffusion of non-uniform field into conducting half-space. The difference between the penetration law for the non-uniform field and the uniform one takes place in the terms of the asymptotic series proportional to the small parameter to the second power and to the second derivative with respect to the vertical coordinate from the external magnetic field intensity at the interface. References 25, figures 8.

Key words: three-dimensional electromagnetic field, electromagnetic field formation, exact analytical solution, skin effect.