

В.М. Михайлов

## О ПОДОБИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, ПРОДОЛЖАЕМЫХ С РАЗЛИЧНЫХ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

*Мета.* Метою роботи є формулювання умов подібності плоскопаралельних магнітних полів при різкому поверхневому ефекті, що продовжуються в невідвідне і немагнітне середовище з різних осей прямокутних координат, котрі обмежують плоскі поверхні провідників. *Методика.* Використано класичне формулювання задачі Коші для рівняння Лапласа відносно векторного потенціалу магнітного поля, методи математичної фізики та основні положення теорії подібності. Розглянуто дві відповідні задачі: задача продовження вихідного поля з однієї осі та задача продовження подібного поля з іншої осі, розподіл індукції магнітного поля на котрій є невідомим. *Результати.* Сформульовано необхідні та достатні умови подібності плоскопаралельних імпульсних або високочастотних магнітних полів, що продовжуються з різних осей прямокутних координат. Для заданих непарного та парного розподілів індукції на осі вихідного магнітного поля визначено відповідні розподіли на осі, а також розв'язані задачі продовження подібного поля. *Наукова новизна.* Доведено, що для подібності полів, які розглянуто, необхідна та достатня пропорційність представлених у критеріальній формі відповідних проєкцій векторів цих полів у схожих точках осей. Бібл. 11, рис. 4.

*Ключові слова:* плоскопаралельне магнітне поле, різкий поверхневий ефект, задача Коші для рівняння Лапласа, теорія подібності.

*Цель.* Целью работы является формулировка условий подобия плоскопаралельных магнитных полей при резком поверхностном эффекте, которые продолжаются в непроводящую и немагнитную среду с различными осями прямоугольных координат, ограничивающих плоские поверхности проводников. *Методика.* Использованы классическая формулировка задачи Коши для уравнения Лапласа относительно векторного потенциала магнитного поля, методы математической физики и основные положения теории подобия. Рассмотрены две соответствующие задачи: задача продолжения исходного поля с одной оси и задача продолжения подобного поля с другой оси, распределение индукции магнитного поля на которой неизвестно. *Результаты.* Сформулированы необходимые и достаточные условия подобия плоскопаралельных импульсных или высокочастотных магнитных полей, продолжаемых с различных осей прямоугольных координат. Для заданных нечетного и четного распределений индукции на оси исходного магнитного поля определены соответствующие распределения на оси, а также решены задачи продолжения подобного поля. *Научная новизна.* Доказано, что для подобия рассмотренных полей необходима и достаточна пропорциональность представленных в критериальной форме соответствующих проекций векторов этих полей в сходственных точках осей. Библ. 11, рис. 4.

*Ключевые слова:* плоскопаралельное магнитное поле, резкий поверхностный эффект, задача Коши для уравнения Лапласа, теория подобия.

**Введение.** Форму массивных соленоидов (индукторов) и электродов, используемых в электрофизических технологиях для получения электромагнитных полей заданного распределения, находят при помощи решения задачи продолжения поля [1-3]. Ограничимся рассмотрением плоскопаралельных (плоских) импульсных или высокочастотных магнитных полей, продолжаемых с одной из осей прямоугольных координат (например, оси  $x$ ) [4]. В формулировку задачи входит заданное на этой оси распределение некоторой проекции вектора продолжаемого поля. На практике может возникнуть необходимость решить задачу продолжения поля с подобным распределением на оси  $y$ . При этом очевидным является использование результатов, полученных для оси  $x$ . Основная трудность такого подхода состоит, прежде всего, в недостаточном теоретическом обосновании, вследствие чего заданное распределение поля на оси  $y$  оказывается неизвестным.

**Цель работы** – формулировка условий подобия плоскопаралельных магнитных полей при резком поверхностном эффекте, которые продолжаются в непроводящую и немагнитную среду с различными осями прямоугольных координат, ограничивающих плоские поверхности проводников.

**Условия подобия магнитных полей, продолжаемых с плоских поверхностей проводников.** В массивном проводнике с плоской граничной

поверхностью под действием импульсного или высокочастотного магнитного поля внешнего индуктора, профиль которого нужно определить, индуктируются вихревые токи. В проводнике резко проявляется поверхностный эффект. Примем допущение идеального поверхностного эффекта [3] и заменим проводник идеально сверхпроводящим полупространством. Используем три системы декартовых координат на плоскости: основную (общую)  $xOy$  и две вспомогательные –  $x_1Oy_1$  и  $x_2Oy_2$ . Рассмотрим две соответствующие задачи продолжения плоскопаралельного магнитного поля в немагнитные непроводящие полупространства  $y_1 > 0$  и  $x_2 > 0$  без источников (рис. 1): с оси  $x_1$  (первая задача, решение которой известно) и с оси  $y_2$  (вторая задача). Полупространства  $y_1 < 0$  и  $x_2 < 0$  являются идеальными сверхпроводниками.

Уравнение для векторного потенциала  $A(x, y)$  таких полей имеет вид [5]

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $x = x_1 \vee x_2$ ,  $y = y_1 \vee y_2$ ,  $A(x, y) = A_1(x_1, y_1) \vee A_2(x_2, y_2)$ . Граничные условия на оси  $x_1 -$

$$A_1(x_1, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial A_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=0} = B_{1x}(x_1, 0), \quad (2, 3)$$

на оси  $y_2$  –

$$A_2(0, y_2) = 0, \quad \left. \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = -B_{2y}(0, y_2), \quad (4, 5)$$

где  $B_{1x}(x_1, 0)$  и  $B_{2y}(0, y_2)$  – проекции индукции магнитного поля  $\vec{B}_1(x_1, y_1)$ ,  $y_1 \geq 0$  и  $\vec{B}_2(x_2, y_2)$ ,  $x_2 \geq 0$  на оси  $x_1$  и  $y_2$ .

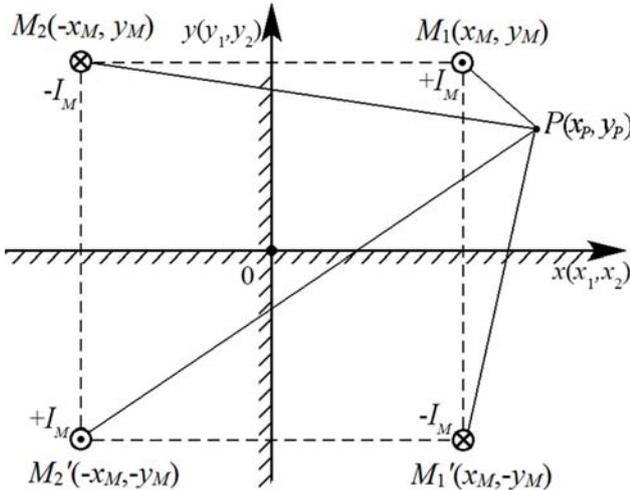


Рис. 1. Системы координат и параллельных осей с токами, создающими заданные распределения индукции магнитного поля (8)

Заметим, что  $B_{1x}(x_1, 0)$  – заданная функция, а проекцию  $B_{2y}(0, y_2)$  предстоит определить. Сравнивая формулировки двух рассматриваемых задач (1) – (3) и (1), (4), (5), отметим, что они имеют геометрически подобные области решения (полупространства  $y_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ , рис. 1) с одинаковыми физическими свойствами, содержат уравнение одного и того же типа и подобные граничные условия (2) и (4) на осях  $x_1$  и  $y_2$ , с которых продолжают поля. Описанные условия являются необходимыми, однако их недостаточно для подобия: остаются граничные условия (3), (5).

Предположим, что рассматриваемые магнитные поля подобны. Тогда из (1) – (5) следует, что сходственными координатами [6-8] в областях продолжения полей являются  $x_1$  и  $y_2$ ,  $y_1$  и  $x_2$ , а соответствующими функциями –  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ . Поэтому аналогичными величинами, характеризующими предположительно подобные поля, должны быть

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} \text{ и } \frac{\partial A_2}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial y_1} \text{ и } \frac{\partial A_2}{\partial x_2}, \text{ или} \\ -B_{1y}(x_1, y_1) \text{ и } B_{2x}(x_2, y_2), \quad B_{1x}(x_1, y_1) \text{ и } -B_{2y}(x_2, y_2). \quad (6, 7)$$

Пусть  $P$  – точка наблюдения поля с координатами  $x_P = x_{1P} \vee x_{2P}$ ,  $y_P = y_{1P} \vee y_{2P}$  (рис. 1). Тогда сходственными координатами точки  $P$  будут  $x_{1P}$  и  $y_{2P}$ ,  $y_{1P}$  и  $x_{2P}$ .

Учитывая основные положения теории подобия [6-8], в дополнение к отмеченным необходимым условиям можно утверждать следующее: для подобия двух сопоставляемых магнитных полей необходимо и достаточно, чтобы значения представленных в критериальной форме проекций индукции магнитного поля  $B_{1x}(x_1, 0)$  и  $B_{2y}(0, y_2)$  в сходственных точках осей,

с которых продолжают эти поля, были пропорциональны.

Это условие позволяет найти  $B_{2y}(0, y_2)$  и тем самым получить полную формулировку второй задачи.

**Распределение индукции на оси  $y_2$  для подобного магнитного поля.** Пусть в первой задаче заданные распределения индукции на оси  $x_1$  могут быть представлены формулой

$$B_{1x}(x_1, 0) = \frac{\mu_0 I_{1M}}{\pi} \left\{ y_{1M} \left[ \frac{1}{(x_1 - x_{1M})^2 + y_{1M}^2} \mp \frac{1}{(x_1 + x_{1M})^2 + y_{1M}^2} \right] \right\}, \quad (8)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $I_{1M}$ ,  $x_{1M}$ ,  $y_{1M}$  – параметры распределений.

Функция в фигурных скобках формулы (8) является нечетной или четной в зависимости от знака минус или плюс между слагаемыми в квадратных скобках. В обоих случаях она имеет известное синус- или косинус-преобразование Фурье. Множитель перед рассматриваемой функцией является постоянной, поэтому такие преобразования имеет и  $B_{1x}(x_1, 0)$ . Физический смысл (8) – индукция магнитного поля, создаваемого на оси  $x_1$  системой четырех параллельных, симметрично расположенных осей с токами  $\pm I_M = \pm I_{1M}$ , две из которых ( $M_1'$  и  $M_2'$ ) заменяют влияние нижнего идеально сверхпроводящего полупространства [9, 10] (рис. 1). Параметры  $x_M = x_{1M}$ ,  $y_M = y_{1M}$  определяют положение осей в точках  $M_1$ ,  $M_1'$ ,  $M_2$ ,  $M_2'$  плоскости  $x_1 O y_1$ . Токи  $+I_M$  имеют положительное, а  $-I_M$  – отрицательное направления, обозначенные соответственно точкой или крестиком. Для токов на рис. 1 получаем нечетное распределение индукции. Если токи в верхнем полупространстве имеют одинаковое (например, положительное) направление (при этом токи в нижнем полупространстве направлены также одинаково, но противоположно по отношению к первым), имеем четное распределение индукции.

Найдем такие распределения  $B_{2y}(0, y_2)$  на оси  $y_2$ , которые удовлетворяют сформулированному выше необходимому и достаточному условию подобия. Для этого вначале устанавливаем сходственные параметры [6-8] распределений  $B_{1x}(x_1, 0)$  и  $B_{2y}(0, y_2)$ :  $I_{1M}$  и  $I_{2M}$ ,  $x_{1M}$  и  $y_{2M}$ ,  $y_{1M}$  и  $x_{2M}$ , где  $I_{2M}$ ,  $x_{2M}$  и  $y_{2M}$  – параметры неизвестных пока распределений  $B_{2y}(0, y_2)$ . Затем, используя соответствие аналогичных величин (7), заменим в формуле (8) координаты и параметры на сходственные координаты и параметры второй задачи. Получим:

$$B_{2y}(0, y_2) = -\frac{\mu_0 I_{2M}}{\pi} \left\{ x_{2M} \left[ \frac{1}{(y_2 - y_{2M})^2 + x_{2M}^2} \mp \frac{1}{(y_2 + y_{2M})^2 + x_{2M}^2} \right] \right\}. \quad (9)$$

Представим формулы (8) и (9) в безразмерном виде (в критериальной форме), используя две системы базисных величин:  $l_{1b}$  и  $l_{2b}$  – длину,  $I_{1b}$  и  $I_{2b}$  – ток,  $B_{1b}$  и

$B_{2b}$  – индукцию (цифру один в нижнем индексе имеют базисные величины для формулы (8), два – (9)). Безразмерные величины получаем делением соответствующих размерных на базисные и помечаем звездочками. После преобразований формулы (8) и (9) принимают такой вид:

$$B_{1x}^*(x_1^*, 0) = \frac{1}{\pi} I_{1M}^* y_{1M}^* \left[ \frac{1}{(x_1^* - x_{1M}^*)^2 + y_{1M}^{*2}} \mp \frac{1}{(x_1^* + x_{1M}^*)^2 + y_{1M}^{*2}} \right], \quad -\infty < x_1^* < \infty; \quad (10)$$

$$B_{2y}^*(0, y_2^*) = -\frac{1}{\pi} I_{2M}^* x_{2M}^* \left[ \frac{1}{(y_2^* - y_{2M}^*)^2 + x_{2M}^{*2}} \mp \frac{1}{(y_2^* + y_{2M}^*)^2 + x_{2M}^{*2}} \right], \quad -\infty < y_2^* < \infty. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), видим, что при

$$x_{1M}^* = y_{2M}^*, \quad y_{1M}^* = x_{2M}^* \quad (12)$$

в сходственных точках осей  $x_1$  и  $y_2$  с координатами  $x_1^* = y_2^*$  значения  $B_{1x}^*(x_1^*, 0)$  пропорциональны значениям  $B_{2y}^*(0, y_2^*)$ . Следовательно, необходимое и достаточное условие подобия выполняется, а искомые распределения  $B_{2y}(0, y_2)$  для подобного магнитного поля имеют вид (9). Если дополнительно к (12) принять

$$I_{1M}^* = I_{2M}^*, \quad (13)$$

то модули сравниваемых значений индукции будут равны, хотя для подобия это не обязательно.

Все величины, входящие в условия (12) и (13), являются критериями подобия. Базисные величины  $l_{1b}, l_{2b}$  выбираем так, чтобы выполнялись условия (12). В общем случае  $l_{1b}$  и  $l_{2b}$  могут быть любыми, но при необходимости их находим с учетом условия (13). При определении  $B_{1x}^*(x_1^*, 0)$  и  $B_{2y}^*(0, y_2^*)$  принято  $B_{1b} = \mu_0 I_{1b} / l_{1b}$ ,  $B_{2b} = \mu_0 I_{2b} / l_{2b}$ .

Физический смысл распределений (9) аналогичен описанному для (8): индукция магнитного поля, создаваемого на оси  $y_2$  четырьмя параллельными осями с токами  $\pm I_M = \pm I_{2M}$  (оси расположены в точках, координаты которых  $\pm x_M$  и  $\pm y_M$  определяются параметрами  $\pm x_{2M}$  и  $\pm y_{2M}$ , рис. 1).

На рис. 2 показаны симметричные части нечетных (а) и четных (б) распределений индукции магнитного поля на осях при  $x_1 \geq 0$  и  $y_2 \geq 0$ , рассчитанные по формулам (10), (11). Принято:  $l_{1b} = l_{2b}$ ,  $I_{1b} = I_{2b}$ ,  $I_{1M} = I_{2M}$ ; для кривых 1  $x_{1M}^* = 0,1$ ,  $y_{1M}^* = 0,1$ ; 2 – 0,25, 0,1; 3 – 0,15, 0,2; 4 – 0,25, 0,2.

Значения  $x_{2M}^*$  и  $y_{2M}^*$  определены при помощи соотношений (12). Совпадение распределений  $B_{1x}^*(x_1^*, 0)$  и  $-B_{2y}^*(0, y_2^*)$  иллюстрирует необходимое и достаточное условие подобия магнитных полей.

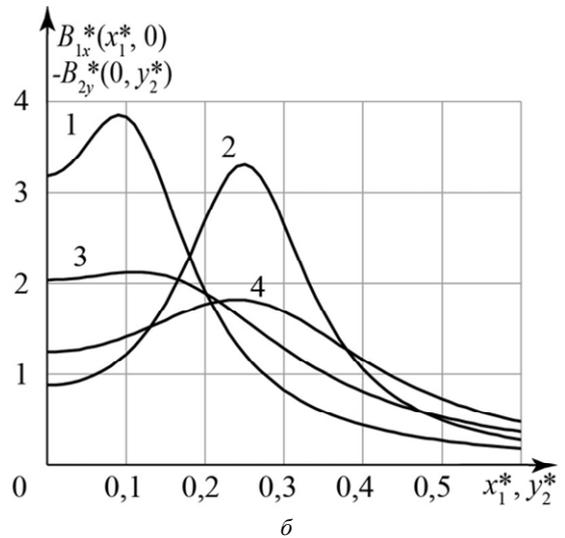
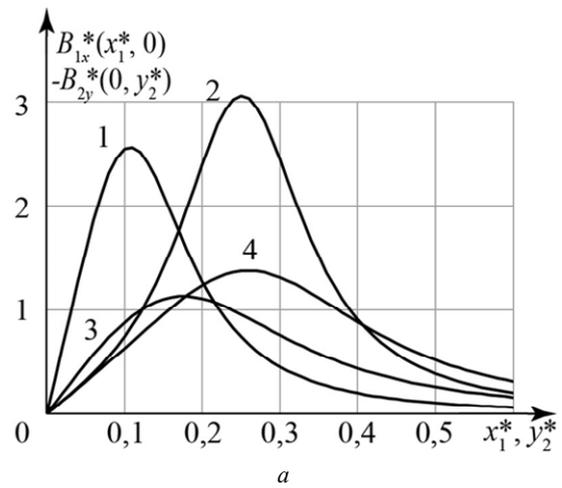


Рис. 2. Нечетные (а) и четные (б) распределения индукции магнитного поля на осях  $x_1, y_2$

**Продолжение подобных магнитных полей при помощи решений первой задачи.** Решения первой задачи (1) – (3) с учетом (8), полученные методом частных решений, непрерывно зависящих от параметра, имеют такой вид:

$$A_1(x, y) = \frac{2\mu_0 I_M}{\pi} \int_0^\infty e^{-y_M \lambda} \left\{ \frac{\sin(x_M \lambda) \sin(x \lambda)}{\cos(x_M \lambda) \cos(x \lambda)} \right\} \times \lambda^{-1} \text{sh}(y \lambda) d\lambda, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < y_M. \quad (14)$$

Первая строка множителя подынтегральной функции в фигурных скобках (14) относится к нечетному распределению  $B_{1x}(x_1, 0)$ , вторая – к четному.

Решения второй задачи (1), (4), (5) с учетом (9) находим заменой в формуле (14) координат и параметров на сходственные величины подобного поля. Получим:

$$A_2(x, y) = \frac{2\mu_0 I_M}{\pi} \int_0^\infty e^{-x_M \lambda} \left\{ \frac{\sin(y_M \lambda) \sin(y \lambda)}{\cos(y_M \lambda) \cos(y \lambda)} \right\} \times \lambda^{-1} \text{sh}(x \lambda) d\lambda, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < x < x_M. \quad (15)$$

В формулах (14), (15)  $I_M = I_{1M} \vee I_{2M}$ ,  $x_M = x_{1M} \vee x_{2M}$ ,  $y_M = y_{1M} \vee y_{2M}$ . Ограничения  $y < y_M$  и  $x < x_M$  обусловлены сходимостью несобственных интегралов [4]. Правильность описанной методики определения подобно-

го магнитного поля и, в частности, формулы (15) подтверждается совпадением последней с решением второй задачи тем же методом, что и первой.

Другой метод решения первой задачи состоит в использовании функции Грина для оси с единичным током, расположенной в немагнитной и непроводящей среде параллельно поверхности идеально сверхпроводящего полупространства. Для нечетного распределения  $B_{1x}(x_1, 0)$  (8) имеем [10]:

$$A(P) = \frac{\mu_0 I_M}{\pi} \ln \left[ \frac{r_{M_1'P} r_{M_2P}}{r_{M_1P} r_{M_2'P}} \right], \quad (16)$$

где  $r_{M_1P}$ ,  $r_{M_1'P}$ ,  $r_{M_2P}$ ,  $r_{M_2'P}$  – расстояния между точками  $P$  и соответственно  $M_1$ ,  $M_1'$ ,  $M_2$ ,  $M_2'$  (рис. 1).

Используя известную связь между индукцией и векторным потенциалом магнитного поля [5] и (16), для расчета проекций  $\vec{B}_1$  получим следующие формулы:

$$B_{1x}(P) = -\frac{\mu_0 I_M}{2\pi} \left[ (y_P - y_M) \left( \frac{1}{r_{M_1P}^2} - \frac{1}{r_{M_2P}^2} \right) + (y_P + y_M) \left( \frac{1}{r_{M_2'P}^2} - \frac{1}{r_{M_1'P}^2} \right) \right]; \quad (17)$$

$$B_{1y}(P) = \frac{\mu_0 I_M}{2\pi} \left[ (x_P - x_M) \left( \frac{1}{r_{M_1P}^2} - \frac{1}{r_{M_1'P}^2} \right) + (x_P + x_M) \left( \frac{1}{r_{M_2'P}^2} - \frac{1}{r_{M_2P}^2} \right) \right]. \quad (18)$$

Заметим, что в формулах (16) – (18) принято, что точка наблюдения  $P$  расположена в верхнем полупространстве  $y > 0$  (в частном случае – на оси  $x$ ). Найдем  $B_{2x}(P)$  и  $B_{2y}(P)$  для подобного магнитного поля в области  $x > 0$  (в частном случае на оси  $y$ ), заменяя в формулах (17) и (18) координаты и параметры на сходственные величины. Получаем удивительные, на первый взгляд, результаты: формулы для определения  $B_{2x}(P)$  и  $B_{2y}(P)$  формально совпадают с формулами (17) и (18). Причиной является то, что система четырех осей с токами, создающая магнитное поле в области  $y > 0$  первой задачи (подробнее – в физическом смысле формулы (8)), одновременно создает подобное магнитное поле в области  $x > 0$ . При этом оси, расположенные в точках  $M_2$  и  $M_2'$  (рис. 1), заменяют влияние идеально сверхпроводящего полупространства  $x < 0$ . Следовательно, формула (16) является решением и второй задачи для подобного магнитного поля в области  $x > 0$  в случае нечетного распределения  $B_{2y}(0, y_2)$ .

При использовании функции Грина в случае четных распределений  $B_{1x}(x_1, 0)$  и  $B_{2y}(0, y_2)$  нужно изменить направления токов в двух осях на противоположные по отношению к принятым на рис. 1: для исходного поля – в осях  $M_2$  и  $M_2'$ , для подобного поля – в осях  $M_1'$  и  $M_2'$ . В отличие от нечетных распределе-

ний индукции на осях векторный потенциал  $A(P)$  описывается двумя различными формулами. Их получим из формулы (16), поменяв местами  $r_{M_2P}$  и  $r_{M_2'P}$  для исходного поля,  $r_{M_1'P}$  и  $r_{M_2'P}$  для подобного поля:

$$A_1(P) = \frac{\mu_0 I_{1M}}{\pi} \ln \left[ \frac{r_{M_1'P} r_{M_2'P}}{r_{M_1P} r_{M_2P}} \right], \quad (19)$$

$$A_2(P) = \frac{\mu_0 I_{2M}}{\pi} \ln \left[ \frac{r_{M_2P} r_{M_2'P}}{r_{M_1P} r_{M_1'P}} \right]. \quad (20)$$

Формулы для расчета проекций индукции  $B_{1x}(P)$  и  $B_{1y}(P)$ ,  $B_{2x}(P)$  и  $B_{2y}(P)$  отличаются от (17) и (18) противоположными знаками перед дробями  $1/r_{M_2P}^2$  и  $1/r_{M_2'P}^2$ ,  $1/r_{M_1'P}^2$  и  $1/r_{M_2'P}^2$ . Правильность преобразований подтверждена соответствием получаемых формул соотношениям (6, 7).

На рис. 3 и 4 изображены силовые линии исходного и подобного магнитных полей  $A(x, y) = \text{const}$ , рассчитанные по формулам (16), (19), (20) для распределений индукции 2 на рис. 2, а, б. Принято  $A^* = A/A_b$ ,  $A_b = \mu_0 I_M$ ,  $A_b = A_{1b} \vee A_{2b}$ ,  $A_{1b} = A_{2b}$ ,  $l_{1b} = l_{2b}$ . Для силовых линий 1, 5  $A_1^* = A_2^* = 0,05$ , 2, 6 – 0,1, 3, 7 – 0,15, 4, 8 – 0,2.

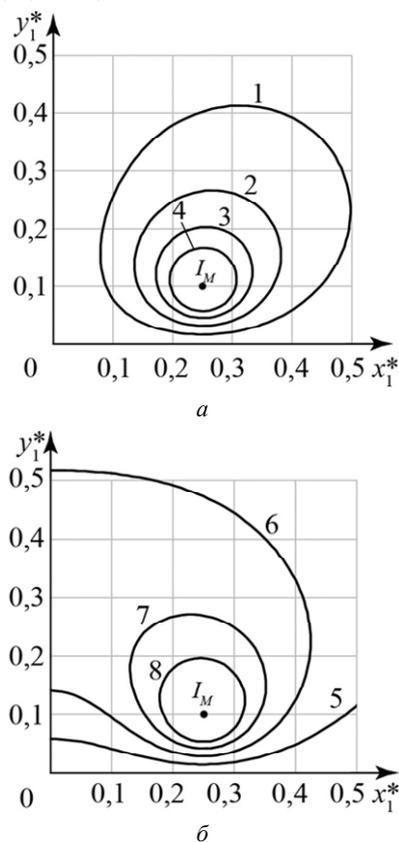


Рис. 3. Силовые линии магнитного поля при нечетном (а) и четном (б) распределениях индукции на оси  $x_1$

Видим, что соответствующие силовые линии рассматриваемых магнитных полей геометрически подобны, что подтверждает правильность полученных

результатов. Силовые линии, показанные на рис. 4, а, б, ограничивают профили индукторов-токопроводов для создания импульсных или высокочастотных магнитных полей заданных распределений на оси  $y_2$ .

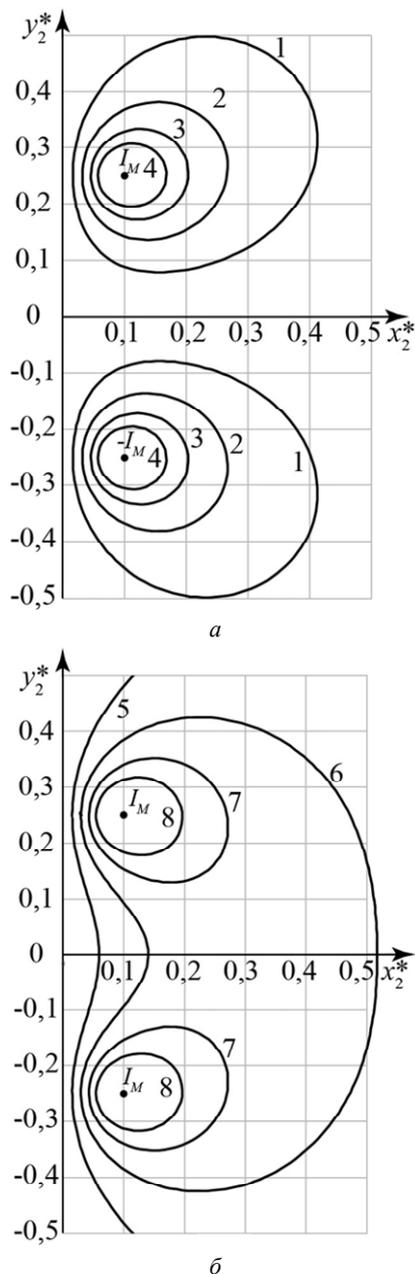


Рис. 4. Силовые линии магнитного поля при нечетном (а) и четном (б) распределении индукции на оси  $y_2$

Результаты, полученные для магнитного поля, можно использовать для определения профилей одного или нескольких длинных параллельных равномерно заряженных электродов, при помощи которых на плоской поверхности проводника нужно создать электростатическое поле заданного распределения. Для этого используем электростатическую аналогию плоскопараллельных электростатических и магнитных полей проводников при резком поверхностном эффекте (J.D. Cockroft, 1929, [4]), согласно которой распределения взятой со знаком «минус» проекции напряженности электрического поля  $E_{1y}(x_1, 0)$  и  $B_{1x}(x_1, 0)$  соответствуют одно другому.

**Приложение.** Использование двух методов решения задач продолжения полей позволяет не только выполнить проверку результатов, но и получить формулы для вычислений сложных несобственных интегралов, отсутствующие в справочной литературе [11]. Например, сравнивая формулы (14) и (19) для исходного поля, имеем два несобственных интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{-y_M \lambda} \lambda^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \sin(x_M \lambda) \sin(x \lambda) \\ \cos(x_M \lambda) \cos(x \lambda) \end{array} \right\} \text{sh}(y \lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left\{ \frac{(x - x_M)^2 + (y + y_M)^2}{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \frac{(x + x_M)^2 + (y - y_M)^2}{(x + x_M)^2 + (y + y_M)^2} \right] \right\}. \quad (21)$$

Границы изменения  $x$  и  $y$  такие же, как и в формуле (14). Описанным способом можно получить еще несколько формул для вычисления несобственных интегралов при помощи (17), (18), а также соответствующих формул для подобного поля. Сравнение (15) с (20) приводит к ряду несобственных интегралов. Например:

$$\int_0^{\infty} e^{-x_M \lambda} \lambda^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \sin(y_M \lambda) \sin(y \lambda) \\ \cos(y_M \lambda) \cos(y \lambda) \end{array} \right\} \text{sh}(x \lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left\{ \frac{(x + x_M)^2 + (y - y_M)^2}{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \frac{(x - x_M)^2 + (y + y_M)^2}{(x + x_M)^2 + (y + y_M)^2} \right] \right\}. \quad (22)$$

Видим, что формула (22) отличаются от (21) только сходственными величинами подобного магнитного поля. Кроме того, нужно учесть также другие границы изменения  $x$  и  $y$  (см. формулу (15)).

#### Выводы.

1. Для подобия плоскопараллельных импульсных или высокочастотных магнитных полей, продолжаемых в немагнитную и непроводящую среду с различными осями декартовых координат, ограничивающих плоские поверхности проводников, необходимо и достаточно, чтобы значения представленных в критериальной форме соответствующих проекций индукции магнитного поля в сходственных точках осей были пропорциональны. Это условие позволяет найти распределение индукции на оси, с которой продолжается подобное поле.

2. Решения задач продолжения подобных магнитных полей могут быть получены из известных решений задач продолжения исходных полей заменой в них координат и параметров на соответствующие сходственные величины.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков: Высшая школа, 1977. – 168 с.
2. Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 416 с.
3. Гурбанов Г.Г., Касьянков П.П., Таганов И.Н. Распространение потенциала поля по заданному его распределению на оси. *Радиотехника и электроника*, 1967, № 4, С. 659-661.
4. Михайлов В.М. Определение профилей электродов и соленоидов для создания заданных распределений поля. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки»*, 2000, Ч. 6, С. 13-16.
5. Тозони О.В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. – Киев: Техніка, 1967. – 252 с.
6. Кирпичев М.В., Конаков П.К. Математические основы теории подобия. – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949. – 104 с.
7. Эйгенсон Л.С. Моделирование. – М.: Советская наука, 1952. – 372 с.
8. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики). – М.: Высшая школа, 1984. – 439 с.
9. Васецкий Ю.М., Власов Д.И., Коновалов О.Я., Михайлов В.М. Некоторые решения задачи продолжения плоского поля в элементарных функциях. *Сборник трудов конференции «Моделирование – 2012»*, Киев, ИПМЭ им. Г.Е. Пухова, 2012, С. 232-236.
10. Valery Mikhailov, Mykyta Petrenko. Inductor shape determination for electromagnetic forming of sheet workpieces. *Przeglad Elektrotechniczny*, 2020, no. 1, pp. 74-77. doi: 10.15199/48.2020.01.18.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
6. Kirpichev M.V., Konakov P.K. *Matematicheskie osnovy teorii podobii* [Mathematical foundations of similarity theory]. Moscow-Leningrad, Acad. of Sci. USSR Publ., 1949. 104 p. (Rus).
7. Eigenson L.S. *Modelirovanie* [Modeling]. Moscow, Sovetskaya nauka Publ., 1952. 372 p. (Rus).
8. Venikov V.A., Venikov G.V. *Teoriia podobii i modelirovaniia (primeritel'no k zadacham elektroenergetiki)* [The theory of similarity and modeling (in relation to the problems of the electric power industry)]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1984. 439 p. (Rus).
9. Vasetskii Yu.M., Vlasov D.I., Kononov O.Ia., Mikhailov V.M. Some solutions to the problem of continuation of a plane field in elementary functions. *Proceedings of the conference SIMULATION-2012*, Kiev, 2012, pp. 232-236 (Rus).
10. Valery Mikhailov, Mykyta Petrenko. Inductor shape determination for electromagnetic forming of sheet workpieces. *Przeglad Elektrotechniczny*, 2020, no. 1, pp. 74-77. doi: 10.15199/48.2020.01.18.
11. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 1108 p. (Rus).

Поступила (received) 07.08.2020

Михайлов Валерий Михайлович, д.т.н., проф.,  
Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»,  
61002, Харьков, ул. Кирпичева, 2,  
e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com

V.M. Mikhailov  
National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,  
2, Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

#### On the similarity of plane pulsed magnetic fields continued from different coordinate axes.

**Purpose.** The purpose of this work is formulation of similarity conditions for plane magnetic fields at a sharp skin-effect continued in non-conducting and non-magnetic medium from different axes bounding plane surfaces of conductors. **Methodology.** Classic formulation of Cauchy problem for magnetic vector potential Laplace equations, mathematic physics methods and basics similarity theory are used. Two problems are considered: the problem of initial field continuation from one axis and the problem of similar field continuation from other axis on which magnetic flux density or electrical field strength is unknown. **Results.** Necessary and sufficient similarity conditions of plane pulsed or high-frequency magnetic fields continued from different axes of rectangular coordinates are formulated. For the given odd and even magnetic flux density distributions on axis of initial field corresponding the distributions on axis and solution of continued similar field problem are obtained. **Originality.** It is proved that for similarity of examined fields the proportion of corresponding vector field projections represented by dimensionless numbers in similar points of axes is necessary and sufficient. References 11, figures 4.

**Key words:** plane magnetic field, sharp skin-effect, Cauchy problem for Laplace equation, similarity theory.

## REFERENCES

1. Belyj I.V., Fertik S.M., Himenko L.T. *Spravochnik po magnitno-impulsnoj obrabotke metallov* [Directory of magnetic-pulse treatment of metals]. Kharkov, Vysshaya shkola Publ., 1977. 168 p. (Rus).
2. Shneerson G.A. *Polya i perehodnye processy v apparature sverhsilnyh tokov* [Fields and transients in equipment ultra strong currents]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1992. 416 p. (Rus).
3. Gurbanov G.G., Kas'iankov P.P., Taganov I.N. Propagation of the field potential along a given distribution on the axis. *Radio engineering and electronics*, 1967, no. 4, pp. 659-661. (Rus).
4. Mikhailov V.M. Shapes determination of the electrodes and coils to generate predetermined field distributions. *Technical electrodynamic. Thematic issue «Problems of modern electrical engineering»*, 2000, part 6, pp. 13-16. (Rus).
5. Tozoni O.V. *Raschet elektromagnitnykh polei na vychislitel'nykh mashinakh* [Calculation of electromagnetic fields on computers]. Kiev, Tekhnika Publ., 1967. 252 p. (Rus).