

В.М. Михайлов, К.В. Чунихин

## ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В НАМАГНИЧИВАЕМОЙ СРЕДЕ

*Виконано перевірку правильності інтегрального рівняння другого роду для розрахунку розподілу джерел плоскомеридіанного магнетостатичного поля на межах поділу кусково-однорідного магнетованого середовища і його чисельного розв'язку. Для цього використано електростатичну аналогію і аналітичний розв'язок задачі про вплив однорідного електростатичного поля на сферичну діелектричну оболонку в кусково-однорідному діелектричному середовищі. Підтверджено правильність інтегрального рівняння і його чисельного розв'язку за допомогою апроксимуючої системи алгебраїчних рівнянь. Зроблено аналіз впливу магнетних проникностей однорідних областей середовища на розподіл фіктивних магнетних зарядів на поверхнях та напруженість магнетного поля всередині сферичної оболонки. Бібл. 12, табл. 2, рис. 3.*

*Ключові слова:* плоскомеридіанне магнетостатичне поле, кусково-однорідне магнетоване середовище, інтегральне рівняння, електростатична аналогія, фіктивний магнетний заряд.

*Выполнена проверка правильности интегрального уравнения второго рода для расчета распределения источников плоскомеридианного магнитостатического поля на границах раздела кусочно-однородной намагничиваемой среды и его численного решения. Для этого использованы электростатическая аналогия и аналитическое решение задачи о воздействии однородного электростатического поля на сферическую диэлектрическую оболочку в кусочно-однородной диэлектрической среде. Подтверждена правильность интегрального уравнения и его численного решения при помощи аппроксимирующей системы алгебраических уравнений. Сделан анализ влияния магнитных проницаемостей однородных областей среды на распределение фиктивных магнитных зарядов на поверхностях и напряженность магнитного поля внутри сферической оболочки. Библ. 12, табл. 2, рис. 3.*

*Ключевые слова:* плоскомеридианное магнитостатическое поле, кусочно-однородная намагничиваемая среда, интегральное уравнение, электростатическая аналогия, фиктивный магнитный заряд.

**Введение.** Для расчета магнитостатических полей в неоднородных намагничиваемых средах эффективно применение интегральных уравнений второго рода относительно плотности фиктивных магнитных зарядов в объеме и на поверхностях раздела участков среды [1-3]. Интегральные уравнения аппроксимируют на пространственной сетке системами алгебраических уравнений высокого порядка, которые решают на вычислительных машинах. Как при составлении интегральных уравнений, так и при их аппроксимации могут быть допущены ошибки, связанные, например, с несогласованностью направлений векторов, интегрированием на элементарном участке расчетной области с особой точкой ядра интегрального уравнения.

Актуальность данной работы обусловлена необходимостью проверки правильности используемых алгоритмов и трудоемких вычислительных процедур при помощи задач, имеющих аналитические (точные) решения – тестирования. Число таких решений в магнитостатике относительно невелико. В известных работах не в полной мере используют точные решения задач расчета аналогичных физических полей, отдавая предпочтение более точным, по мнению авторов, численным методам.

**Целью** данной работы является использование электростатической аналогии для тестирования алгоритма численного решения интегрального уравнения относительно поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов на границах раздела однородных областей кусочно-однородной намагничиваемой среды в случае плоскомеридианного магнитостатического поля.

**Основные уравнения и формулы.** Пусть требуется тестировать алгоритм решения задачи для кусочно-однородной среды, состоящей из трех однородных областей с различными постоянными абсолютными магнитными проницаемостями  $\mu_k$  ( $k = \overline{1,3}$ ). Оболочка произвольного меридианного сечения (область 2) разделяет неограниченную окружающую среду на области 1 и 3 – соответственно снаружи и внутри оболочки (рис. 1). В частном случае область 3 отсутствует, т.е. имеется осесимметричное тело в неограниченной среде, например, сердечник электромагнита. Используя электростатическую аналогию рассматриваемой задачи [1, 4-6], представляем скалярный потенциал  $\varphi_m$  магнитостатического поля, обусловленного магнитными свойствами среды, в таком виде [3, 7, 8]:

$$\varphi_m(Q) = \frac{1}{\pi\mu_0} \int_l \frac{\sigma_m(M)r_M K(k)}{\sqrt{(z_Q - z_M)^2 + (r_Q + r_M)^2}} dl_M, \quad (1)$$

где  $Q, M \in l$  – точка наблюдения и точка с текущими координатами;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\sigma_m(M)$  – поверхностная плотность фиктивных магнитных зарядов;  $l, dl_M$  – суммарный контур меридианного сечения оболочки и его элемент с центром в точке  $M$ ;  $l = l_1 + l_2$ ,  $l_{1,2}$  – внешняя и внутренняя части суммарного контура;  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода модуля  $k$  [9];

$$k = 2 \sqrt{\frac{r_Q r_M}{(z_Q - z_M)^2 + (r_Q + r_M)^2}};$$

$r_Q, r_M$  и  $z_Q, z_M$  – радиальные и осевые цилиндрические координаты точек  $Q$  и  $M$ .

© В.М. Михайлов, К.В. Чунихин

Напряженности магнитного поля, обусловленного магнитными свойствами среды, и результирующего магнитного поля равны [1]

$$\vec{H}_m = -\text{grad } \varphi_m \quad (2)$$

и

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m, \quad (3)$$

где  $\vec{H}_0$  - напряженность внешнего магнитного поля

Следуя идее метода [1], заметим, что для выполнения расчетов по формулам (1) - (3) необходимо найти неизвестную функцию  $\sigma_m(Q)$ ,  $Q \in l$  путем решения интегрального уравнения

$$\sigma_m(Q) - \frac{\lambda_k}{\pi} \int_l \sigma_m(M) S(Q, M) dl_M = 2\mu_0 \lambda_k H_{0n}(Q), \quad (4)$$

где

$$S(Q, M) = \frac{k}{2\sqrt{r_Q^3}} \left\{ \sqrt{r_M} \left[ K(k) + \frac{1}{k'^2} \times \left( \frac{r_M + r_Q}{2r_M} k^2 - 1 \right) E(k) \right] \cos(\vec{1}_r, \vec{n}_Q) + \frac{z_Q - z_M}{2\sqrt{r_M}} \left( \frac{k}{k'} \right)^2 E(k) \cos(\vec{1}_z, \vec{n}_Q) \right\}; \quad (5)$$

$\vec{1}_r$ ,  $\vec{1}_z$  - орты цилиндрических координат  $r$  и  $z$ ;  $\vec{n}_Q$  - единичная нормаль к контуру  $l$  в точке  $Q \in l$ ;  $E(k)$ ,  $k'$  - полный эллиптический интеграл второго рода модуля  $k$  и дополнительный модуль полных эллиптических интегралов [9];  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ;

$$\lambda_k = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1} + \mu_k}, \quad k = 1, 2;$$

$H_{0n}(Q)$  - нормальная проекция  $\vec{H}_0$ .

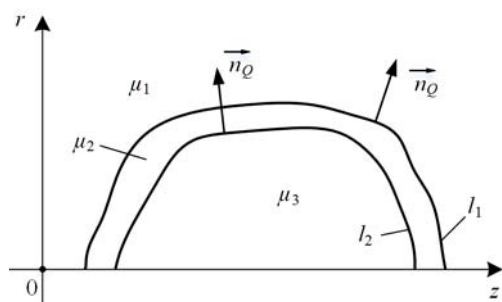


Рис. 1. Осесимметричная оболочка в кусочно-однородной намагничиваемой среде

**Частный случай рассматриваемой задачи.** Для тестирования рассмотрим частный случай описанной выше задачи - воздействие внешнего постоянного однородного магнитного поля, направленного вдоль осевой координаты  $z$ , на сферическую оболочку в кусочно-однородной намагничиваемой среде (рис. 2). Меридианное сечение этой оболочки симметрично относительно оси  $r$ , поэтому для точек  $M$  и  $M'$  с такой симметрией  $\sigma_m(M') = -\sigma_m(M)$  и область определения  $\sigma_m(M)$  уменьшается вдвое. Интегральное уравнение (4) для этого случая преобразуем к такому виду:

$$\sigma_m(Q) - \frac{\lambda_k}{\pi} \int_l \sigma_m(M) [S(Q, M) - S(Q, M')] dl_M = 2\mu_0 \lambda_k H_0 \sin \theta, \quad (6)$$

где  $\theta$  - сферическая угловая координата (рис. 2).

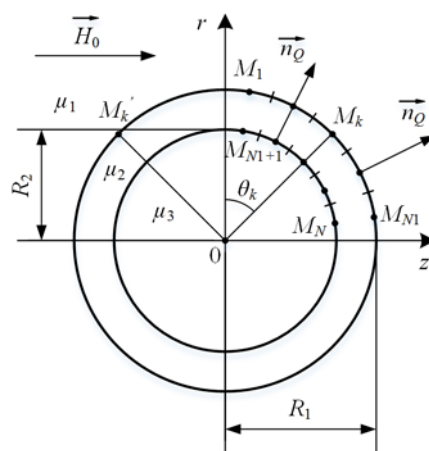


Рис. 2. Сферическая оболочка в кусочно-однородной намагничиваемой среде

Суммарный контур интегрирования  $l$  в уравнении (6) состоит из двух симметричных относительно оси  $r$  половин  $l_1$  и  $l_2$ , находящихся в области  $z \geq 0$ . Функции  $S(Q, M)$  и  $S(Q, M')$ , входящие в ядро этого уравнения, определяем по формуле (5), приняв в ней  $\cos(\vec{1}_r, \vec{n}_Q) = \cos \theta$ ,  $\cos(\vec{1}_z, \vec{n}_Q) = \sin \theta$ ,  $z_{M'} = -z_M$ ,  $r_{M'} = r_M$ . Кроме того, нужно учесть изменение  $z$  - координат симметричных точек  $M'$  при вычислении модуля  $k$ . После решения уравнения (6) напряженность однородного магнитного поля в произвольной точке  $Q$  внутри оболочки (область 3) находим при помощи формулы, которая следует из (1) - (3):

$$H_i(Q) = H_0 + \frac{1}{8\pi\mu_0} \int_l \sigma_m(M) \times \frac{1}{r_Q \sqrt{r_Q r_M}} (S_1 - S_1') dl_M, \quad (7)$$

где

$$S_1 = (z_Q - z_M) \frac{k^3}{k'^2} E(k). \quad (8)$$

Функцию  $S_1'$  в подынтегральном выражении второго слагаемого (7) определяем по формуле (8), заменив в ней, а также в формуле для определения  $k$  координату  $z_M$  на  $z_{M'}$ .

При формировании функций  $S(Q, M)$  и  $S(Q, M')$ , входящих в ядра уравнений (4), (6), были использованы формулы для расчета проекций  $\vec{E}$  плоскомеридианного электростатического поля из работ [3, 8]. Контур  $l$  был разбит на  $N$  элементарных участков с узловыми точками  $M_k$  в их центре, которые образуют пространственную сетку, причем  $k = 1, N_1$  при  $M_k \in l_1$  и  $k = \overline{N_1 + 1, N}$  при  $M_k \in l_2$  (рис. 2). Уравнение (6) было преобразовано в систему алгебраических уравнений на сетке при помощи квадратурной формулы прямо-

угольников. Диагональные элементы матрицы  $N \times N$  этой системы уравнений, соответствующие элементарным участкам контура с особой точкой ядра уравнения (6), определяли по методике, описанной в работе [10]. Система алгебраических уравнений была решена прямым методом, основанным на обращении матрицы левых частей и последующем умножении обращенной матрицы на вектор-столбец правых частей.

Аналитическое решение аналогичной электростатической задачи о воздействии внешнего однородного электрического поля на диэлектрическую сферическую оболочку известно [11]. Используя это решение, получаем формулы для расчета распределения поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов на граничных поверхностях, а также напряженности однородного магнитного поля  $H_i$  внутри намагничиваемой оболочки:

$$\sigma_m(R_1, \theta) = \mu_0 \left( \frac{2}{R_1^3} (B_1 - B_2) + H_0 + A_2 \right) \sin \theta; \quad (9)$$

$$\sigma_m(R_2, \theta) = \mu_0 \left( \frac{2B_2}{R_2^3} + H_i - A_2 \right) \sin \theta; \quad (10)$$

$$H_i = -9H_0 \left/ \left[ c_{\mu 1} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + 2 \right) - 2c_{\mu 2} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) \right] \right., \quad (11)$$

где  $R_1, R_2$  – радиусы граничных поверхностей (рис. 2);

$$B_1 = R_1^3 \left[ H_0 + A_2 \left( 1 + c_{\mu} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \right) \right]; B_2 = c_{\mu} R_2^3 A_2;$$

$$c_{\mu 1} = \mu_3 / \mu_2 + 2; c_{\mu 2} = 1 - \mu_3 / \mu_2; c_{\mu} = c_{\mu 2} / c_{\mu 1};$$

$$A_2 = H_i c_{\mu 1} / 3.$$

Значения  $\sigma_m$  и  $H_i$ , полученные при помощи численного решения интегрального уравнения (6) и расчетов по формуле (7), будем называть приближенными, а при помощи (9) – (11) – точными.

В табл. 1 и 2 приведены значения соответственно  $\sigma_m^* = \sigma_m / (\mu_0 H_0)$  и  $H_i^* = H_i / H_0$ , а на рис. 3 показаны кривые изменения  $\sigma_m^*$  от  $\theta [0, \pi/2]$  на граничных поверхностях оболочки при  $\mu_1 = \mu_0, R_2/R_1 = 0,95$  и вариации  $\mu_{2,3}$ . Данные в столбцах 1 являются приближенными, а в столбцах 2 – точными. Для данных, приведенных в числителях столбцов 1 табл. 1, было принято  $N = 80$ , в знаменателях – 2160. Кривые на рис. 3 построены по результатам численного решения уравнения (6) при  $N = 2160$

Из табл. 1 и 2 следует, что в широких диапазонах изменения магнитных проницаемостей  $\mu_2$  и  $\mu_3$  при измельчении шага пространственной сетки абсолютные расхождения точных и приближенных значений  $\sigma_m^*$  и  $H_i^*$  имеют порядок  $10^{-3}$ . При этом относительные расхождения изменяются от 0,1 % до нескольких процентов за исключением случаев очень малых значений рассчитываемой величины.

Таблица 1

Значения поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов  $\sigma_m^*$  на поверхностях сферической оболочки

| Поверхность оболочки | $\theta_k$ , рад | $\mu_2 = 50\mu_0, \lambda_1 = 0,961$      |         |   |        |  |        | $\mu_3 = \mu_0$  |         |   |         |  |         |
|----------------------|------------------|---|---------|---|--------|--|--------|--|---------|---|---------|--|---------|
|                      |                  | $\mu_3 = 10\mu_0$<br>$\lambda_2 = -0,667$ |         | $\mu_3 = 100\mu_0$<br>$\lambda_2 = 0,333$ |        | $\mu_3 = 1000\mu_0$<br>$\lambda_2 = 0,905$ |        | $\mu_2 = 50\mu_0$<br>$\lambda_1 = 0,961$<br>$\lambda_2 = -0,961$ |         | $\mu_2 = 500\mu_0$<br>$\lambda_1 = 0,996$<br>$\lambda_2 = -0,996$ |         | $\mu_2 = 2000\mu_0$<br>$\lambda_1 = 0,999$<br>$\lambda_2 = -0,999$ |         |
|                      |                  | 1   | 2       | 1   | 2      | 1  | 2      | 1  | 2       | 1   | 2       | 1  | 2       |
| Внешняя              | 0,2945           | 0,7312                                    | 0,7490  | 0,8288                                    | 0,8350 | 0,8457                                     | 0,8498 | 0,6067   | 0,6383  | 0,7823  | 0,8362  | 0,8048   | 0,8617  |
|                      |                  | 0,7483                                    |         | 0,8348                                    |        | 0,8497                                     |        | 0,6370   |         | 0,8339  |         | 0,8594   |         |
|                      | 0,6086           | 1,4404                                    | 1,4753  | 1,6326                                    | 1,6447 | 1,6658                                     | 1,6739 | 1,1951   | 1,2573  | 1,5412  | 1,6470  | 1,5855   | 1,6974  |
|                      |                  | 1,4739                                    |         | 1,6443                                    |        | 1,6736                                     |        | 1,2548   |         | 1,6426  |         | 1,6928   |         |
|                      | 0,9228           | 2,0087                                    | 2,0572  | 2,2765                                    | 2,2935 | 2,3229                                     | 2,3342 | 1,6668   | 1,7532  | 2,1499  | 2,2967  | 2,2117   | 2,3670  |
|                      |                  | 2,0553                                    |         | 2,2929                                    |        | 2,3338                                     |        | 1,7497   |         | 2,2906  |         | 2,3605   |         |
| 1,2369               | 2,3812           | 2,4378                                    | 2,6977  | 2,7178                                    | 2,7525 | 2,7660                                     | 1,9765 | 2,0776   | 2,5502  | 2,7216  | 2,6236  | 2,8049   |         |
|                      | 2,4355           |   | 2,7171  |   | 2,7656 |  | 2,0735 |  | 2,7144  |   | 2,7972  |  |         |
| 1,5510               | 2,5335           | 2,5798                                    | 2,8539  | 2,8762                                    | 2,9033 | 2,9272                                     | 2,1023 | 2,1986   | 2,7249  | 2,8802  | 2,8047  | 2,9683   |         |
|                      | 2,5774           |   | 2,8754  |   | 2,9267 |  | 2,1943 |  | 2,8725  |   | 2,9602  |  |         |
| Внутренняя           | 0,2945           | -0,0507                                   | -0,0443 | 0,0103                                    | 0,0089 | 0,0208                                     | 0,0181 | -0,1286  | -0,1128 | -0,0441   | -0,0173 | -0,0329  | -0,0045 |
|                      |                  | -0,0446                                   |         | 0,0090                                    |        | 0,0182                                     |        | -0,1134  |         | -0,0184   |         | -0,0057  |         |
|                      | 0,6086           | -0,0999                                   | -0,0872 | 0,0203                                    | 0,0176 | 0,0410                                     | 0,0357 | -0,2533  | -0,2222 | -0,0868   | -0,0340 | -0,0647  | -0,0089 |
|                      |                  | -0,0878                                   |         | 0,0177                                    |        | 0,0359                                     |        | -0,2234  |         | -0,0362   |         | -0,0112  |         |
|                      | 0,9228           | -0,1393                                   | -0,1217 | 0,0282                                    | 0,0246 | 0,0572                                     | 0,0497 | -0,3530  | -0,3098 | -0,1206   | -0,0474 | -0,0898  | -0,0124 |
|                      |                  | -0,1224                                   |         | 0,0247                                    |        | 0,0501                                     |        | -0,3116  |         | -0,0505   |         | -0,0156  |         |
|                      | 1,2369           | -0,1646                                   | -0,1442 | 0,0334                                    | 0,0291 | 0,0678                                     | 0,0590 | -0,4174  | -0,3671 | -0,1410   | -0,0562 | -0,1044  | -0,0147 |
|                      |                  | -0,1450                                   |         | 0,0293                                    |        | 0,0593                                     |        | -0,3692  |         | -0,0598   |         | -0,0185  |         |
|                      | 1,5510           | -0,1319                                   | -0,1526 | 0,0139                                    | 0,0308 | 0,0150                                     | 0,0624 | -0,3902  | -0,3885 | -0,0764   | -0,0595 | -0,0349  | -0,0155 |
|                      |                  | -0,1534                                   |         | 0,0310                                    |        | 0,0627                                     |        | -0,3906  |         | -0,0632   |         | -0,0195  |         |

Таблица 2  
Значения напряженности магнитного поля  $H_i^*$ ,  
проникшего внутрь сферической оболочки

| N    | $\mu_2 = 50\mu_0, \lambda_1 = 0,961$  |        |                                       |        | $\mu_3 = \mu_0$  |        |   |        |
|------|---------------------------------------|--------|---------------------------------------|--------|--|--------|---|--------|
|      | $\mu_3 = 10\mu_0, \lambda_2 = -0,667$ |        | $\mu_3 = 100\mu_0, \lambda_2 = 0,333$ |        | $\mu_2 = 50\mu_0, \lambda_1 = 0,961, \lambda_2 = -0,961$ |        | $\mu_2 = 500\mu_0, \lambda_1 = 0,996, \lambda_2 = -0,996$ |        |
|      | 1                                     | 2      | 1                                     | 2      | 1  | 2      | 1   | 2      |
| 80   | 0,2179                                | 0,1908 | 0,0363                                | 0,0308 | 0,4502   | 0,3965 | 0,1507  | 0,0596 |
| 240  | 0,2006                                |        | 0,0325                                |        | 0,4159   |        | 0,0935  |        |
| 720  | 0,1941                                |        | 0,0314                                |        | 0,4031   |        | 0,0711  |        |
| 2160 | 0,1919                                |        | 0,0310                                |        | 0,3987   |        | 0,0634  |        |

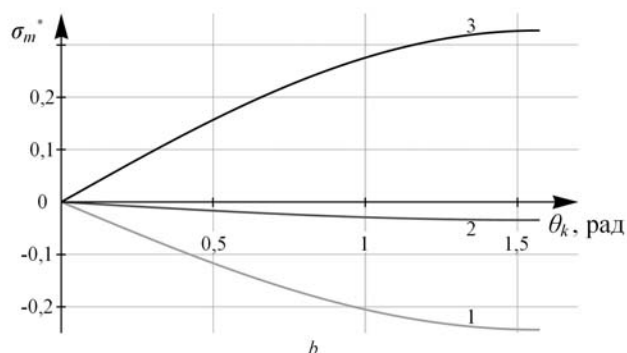
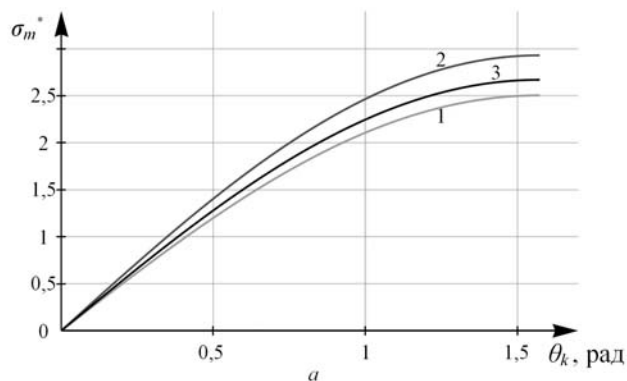


Рис. 3. Распределения  $\sigma_m^*$  на внешней (a) и внутренней (b) поверхностях сферической оболочки: для кривой 1  $\mu_2 = 100\mu_0, \mu_3 = \mu_0$ , 2 —  $\mu_2 = 1000\mu_0, \mu_3 = \mu_0$ , 3 —  $\mu_2 = 10\mu_0, \mu_3 = 5000\mu_0$

Повышение точности численного решения может быть достигнуто также применением более точных квадратурных формул. Из табл. 1 и рис. 3 следует, что численные решения являются устойчивыми при значениях параметра  $\lambda_k$ , близких к  $\pm 1$ . Таким образом, при помощи аналитического решения аналогичной электростатической задачи подтверждена правильность составления исходного интегрального уравнения (4) и алгоритма его численного решения. Заметим, что известны аналитические решения задач о воздействии внешнего однородного электростатического поля на многослойные диэлектрические сферические оболочки [12], которые могут быть использованы для тестирования алгоритма решения интегрального уравнения в случае многослойных осесимметричных намагничиваемых оболочек.

**Особенности изменения  $\sigma_m^*$  и  $H_i^*$  при вариации  $\mu_k$  в случае сферической оболочки.** Значения  $\sigma_m^*$  на расчетной части контура внешней поверхности

сферической оболочки ( $z > 0$ ) положительны при всех  $\mu_k$  и незначительно изменяются при больших  $\mu_2$ . На расчетной части контура внутренней поверхности оболочки при  $\mu_3 < \mu_2$  ( $\lambda_2 < 0$ ) значения  $\sigma_m^*$  отрицательны, а при  $\mu_3 > \mu_2$  ( $\lambda_2 > 0$ ) положительны (табл. 1). Естественно, что на симметричной относительно оси  $r$  части контура, знаки  $\sigma_m^*$  противоположны.

При больших  $\mu_2 \geq 100\mu_0$  оболочка экранирует область 3, следствием чего являются малые значения  $H_i^*$  и  $\sigma_m^*$ . Увеличение  $\mu_3$  приводит к дополнительному уменьшению  $H_i^*$  (табл. 2).

Описанные особенности изменения  $\sigma_m^*$  и  $H_i^*$  могут быть полезны и при анализе магнитостатического поля в случае осесимметричных оболочек и сплошных тел другой формы.

### Выводы.

1. Тестирование правильности интегральных уравнений для расчета распределения фиктивных магнитных зарядов на осесимметричных границах кусочно-однородной намагничиваемой среды и алгоритмов их численных решений может быть выполнено при помощи аналитических решений задач анализа воздействия однородного электростатического поля на кусочно-однородную диэлектрическую среду с центральной симметрией границ — однослойные и многослойные сферические оболочки.

2. В случае сферической оболочки в широком диапазоне значений параметра  $\lambda_k$ , в том числе близких к  $\pm 1$ , численное решение интегрального уравнения является устойчивым, а при измельчении шага сетки относительная погрешность расчета поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов и напряженности магнитного поля внутри оболочки составляет от десятых долей процента до нескольких процентов за исключением случаев очень малых значений этих величин.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М. — Л.: Изд. АН СССР, 1948. — 730 с.
- Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. — К.: «Техника», 1974. — 352 с.
- Михайлов В.М. Расчет электрических и магнитных полей с помощью интегральных и интегродифференциальных уравнений. — К.: УМК ВО, 1988. — 60 с.
- Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники, ч. 3. Теория электромагнитного поля. — М.: «Энергия», 1969. — 352 с.
- Шимони К. Теоретическая электротехника. — М.: Мир, 1964. — 775 с.
- Михайлов В.М., Чунихин К.В. Об электростатической аналогии магнитостатического поля в неоднородной намагничиваемой среде // Электротехника і електромеханіка. — 2017. — №5. — С. 38-40. doi: 10.20998/2074-272X.2017.5.05.
- Колещицкий Е.С. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 168 с.
- Jungerman J.A. Fourth-order uniform electric field form two charged rings // Review of Scientific Instruments. — 1984. — vol.55. — no.9. — pp. 1479-1482. doi: 10.1063/1.1137962.
- Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
- Бондина Н.Н., Волчков Ю.И., Коновалов О.Я. и др. Моделирование электромагнитных полей. Лабораторный

практикум: Учеб. пособие / Под. ред. В.М. Михайлова. – Х.: НТУ «ХПИ», 2007. – 168 с.

11. Бойко Н.И., Бондина Н.Н., Донец С.Е., Левченко Е.В., Михайлов В.М. Поляризация сферических оболочек и распределение электрического поля в биологической клетке // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки». – 2002. – Ч.6. – С. 13-19.

12. Бойко Н.И., Бондина Н.Н., Левченко Е.В., Михайлов В.М. Моделирование воздействия электрического поля на объекты, имеющие многослойную структуру // Электронное моделирование. – 2002. – Т.24. – №1. – С. 70-82.

#### REFERENCES

1. Grinberg G.A. *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii* [Selected questions of mathematical theory of electric and magnetic phenomena]. Moscow-Leningrad, Acad. of Sci. USSR Publ., 1948. 730 p. (Rus).
2. Tozoni O.V., Maergoiz I.D. *Raschet trekhmernykh elektromagnitnykh polei* [Calculation of three-dimensional electromagnetic fields]. Kiev, Tekhnika Publ., 1974. 352 p. (Rus).
3. Mikhailov V.M. *Raschet elektricheskikh i magnitnykh polei s pomoshch'iu integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravnenii* [Calculation of electric and magnetic fields using integral and integrodifferential equations]. Kiev, EMC HE Publ., 1988. 60 p. (Rus).
4. Polivanov K.M. *Teoreticheskie osnovy elektrotehniki, ch. 3. Teoriia elektromagnitnogo polia* [Theoretical foundations of electrical engineering, Part 3. Theory of electromagnetic field]. Moscow, Energiya Publ., 1969. 352 p. (Rus).
5. Simonyi K. *Teoreticheskaya elektrotehnika* [Theoretical Electrical Engineering]. Moscow, Mir Publ., 1964. 775 p. (Rus).
6. Mikhailov V.M., Chunikhin K.V. On electrostatic analogy of magnetostatic field in inhomogeneous magnetized medium. *Electrical engineering & electromechanics*, 2017, no.5, pp. 38-40. (Rus). doi: 10.20998/2074-272X.2017.5.05.
7. Kolechitskii E.S. *Raschet elektricheskikh polei ustroystv vysokogo napriazheniia* [Calculation of electric fields of high voltage devices]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 168 p. (Rus).
8. Jungerman J.A. Fourth-order uniform electric field form two charged rings. *Review of Scientific Instruments*, 1984, vol.55, no.9, pp. 1479-1482. doi: 10.1063/1.1137962.
9. Ianke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p. (Rus).
10. Bondina N.N., Volchkov Iu.I., Konovalov O.Ia. *Modelirovanie elektromagnitnykh polei. Laboratornyi praktikum* [Modeling of electromagnetic fields. Laboratory practice]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2007. 168 p. (Rus).
11. Boyko N.I., Bondina N.N., Donets S.E., Levchenko E.V., Mikhailov V.M. Polarization of spherical shells and electric field distribution in biological cell. *Tekhnichna elektrodynamika. Tem. vypusk «Problemy suchasnoi elektrotehniki»*, 2002, part 6, pp. 13-19. (Rus).
12. Boyko N.I., Bondina N.N., Levchenko E.V., Mikhailov V.M. Modeling the effect of electric field on objects having a multilayer structure. *Electronic modeling*, 2002, vol.24, no.1, pp. 70-82. (Rus).

Поступила (received) 12.10.2017

Михайлов Валерий Михайлович<sup>1</sup>, д.т.н., проф.,  
 Чунихин Константин Вадимович<sup>2</sup>, аспирант,  
<sup>1</sup>Национальный технический университет  
 «Харьковский политехнический институт»,  
 61002, Харьков, ул. Кирпичева, 2,  
 тел/phone +38 057 7076052,  
 e-mail: valery.m.mikhailov@gmail.com  
<sup>2</sup>Государственное учреждение «Институт технических  
 проблем магнетизма Национальной Академии Наук Украины»,  
 61106, Харьков, ул. Индустриальная, 19,  
 тел/phone +38 057 2992162,  
 e-mail: kvchunikhin@gmail.com

V.M. Mikhailov<sup>1</sup>, K.V. Chunikhin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,  
 2, Kurpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

<sup>2</sup>State Institution «Institute of Technical Problems  
 of Magnetism of the NAS of Ukraine»,  
 19, Industrialna Str., Kharkiv, 61106, Ukraine.

#### Testing of numerical solution of the problem of determining sources of magnetostatic field in magnetized medium.

**Purpose.** Testing of numerical solution algorithm for integral equation for calculation of plane meridian magnetostatic field source distribution at interfaces of piecewise homogeneous magnetized medium by means of electrostatic analogy. **Methodology.** The piecewise homogeneous medium consists of three regions with different magnetic permeabilities: the shell of arbitrary meridian section, external unlimited medium outside the shell, and the medium inside the shell. For testing external homogeneous magnetic field effect on spherical shell is considered. The analytical solution of this problem on the basis of electrostatic analogy from the solution of the problem uniform electrostatic field effect on dielectric shell is obtained. We have compared results of numerical solution of integral equation with the data obtained by means of analytical solution at the variation of magnetic permeabilities of regions of medium. **Results.** Integral equation and the algorithm of its numerical solution for calculation of source field distribution at the boundaries of piecewise homogeneous medium is validated. Testing of integral equations correctness for calculation of fictitious magnetic charges distribution on axisymmetric boundaries of piecewise homogeneous magnetized medium and algorithms of their numerical solutions can be carried out by means of analytical solutions of problems of homogeneous electrostatic field effect analysis on piecewise homogeneous dielectric medium with central symmetry of boundaries – single-layer and multilayer spherical shells. In the case of spherical shell in wide range of values of the parameter  $\lambda_b$ , including close to  $\pm 1$ , numerical solution of integral equation is stable, and relative error in calculating of fictitious magnetic charges surface density and magnetic field intensity inside the shell is from tenths of a percent up to several percent except for the cases of very small values of these quantities. **Originality.** The use analytical solutions for problems of calculation of external electrostatic field effect on piecewise homogeneous dielectric bodies for testing integral equations of magnetostatics and algorithms for their numerical solutions. **Practical value.** The described method of testing integral equations of magnetostatics and their numerical solutions can be used for calculation of magnetic fields of spacecraft control system electromagnets. References 12, tables 2, figures 3.  
**Key words:** plane meridian magnetostatic field, piecewise homogeneous magnetized medium, integral equation, electrostatic analogy, fictitious magnetic charge.