

Ю.А. Сиротин, Т.С. Иерусалимова

## УРАВНЕНИЯ МГНОВЕННЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОЩНОСТЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ 3-ФАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ

*Для 3-фазной схемы электропоставки рассмотрены несинусоидальные режимы, которые классифицируются скалярной та векторной миттєвими потужностями (МП). В рамках часового та спектрального підходів теорії потужності отримані комплексні форми активної (скалярної) МП і (неактивної) векторної МП. Для 4-провідної мережі отримані рівняння потужності комплексних скалярних і комплексних векторних потужностей несинусоїдальних режимів. Рівняння потужностей узагальнюють відповідні рівняння синусоїдальних несимметричних режимів у 4-провідній мережі. Бібл. 3, рис. 3.*

*Ключові слова:* трифазне коло, класична миттєва потужність, векторна миттєва потужність, комплексний 3-вимірний ряд Фур'є, активна і реактивна потужність, комплексна векторна потужність, повна потужність, комплексна потужність, рівняння потужності, незбалансований режим, несинусоїдальний режим, 3-вимірний комплексний коефіцієнт.

*Для 3-фазной схемы электроснабжения рассмотрены несинусоидальные режимы, классифицируемые скалярной и векторной мгновенными мощностями (ММ). В рамках временного и спектрального подходов теории мощности получены комплексные формы активной (скалярной) ММ и (неактивной) векторной ММ. Для 4-проводной сети получены уравнения мощностей комплексных скалярных и комплексных векторных мощностей несинусоидальных режимов. Уравнения мощностей обобщают соответствующие уравнения синусоидальных несимметричных режимов в 4-проводной сети. Библ. 3, рис. 3.*

*Ключевые слова:* трехфазная цепь, классическая мгновенная мощность, векторная мгновенная мощность, комплексный 3-мерный ряд Фурье, активная и реактивная мощность, комплексная векторная мощность, кажущаяся мощность, комплексная мощность, уравнение мощности, несбалансированный режим, несинусоидальный режим, трехмерный комплексный коэффициент.

**Введение.** Неидеальная (активно-реактивная, несимметричная и нелинейная) нагрузка потребляет не только электроэнергию (ЭЭ) активной мощности, но и ЭЭ неактивных составляющих полной мощности (ПМ). Для ряда таких нагрузок потребление ЭЭ неактивных составляющих обусловлено технологическими причинами и обеспечивает долговременный нормальный режим работы неидеальной (искажающей) нагрузки. Неактивные составляющие ПМ (некачественное потребление) приводят к дополнительным потерям в энергосистеме, ухудшая качество энергоснабжения, однако не учитываются и недоплачиваются.

Эффективным решением задачи сокращения потерь и повышения точности учёта ЭЭ является совместное применение компенсирующих устройств (КУ) и средств учёта ЭЭ. Существующие средства учёта измеряют ЭЭ, обусловленную симметрией и линейностью элементов нагрузки. Неактивные составляющие ПМ, обусловленные несимметрией и нелинейностью активно-реактивных элементов нагрузки, не измеряются и не учитываются. Компенсация, измерение и учёт составляющих ПМ – связанные, дополняющие друг друга задачи, которые с разных экономических позиций решают проблему эффективного потребления ЭЭ и должны решаться в рамках общей теории мощности (ТМ), в реальных условиях нарушения симметрии и синусоидальности режима поставки и потребления.

**Постановка задачи.** Растущий теоретический и практический интерес к определениям ТМ, интерпретациям понятий реактивной мощности, поиски физического смысла, неоднозначность определения полной мощности в многофазных системах, сложность задачи привели к созданию различных «школ» ТМ (частичную библиографию см. в [1]). Для несинусоидальных многофазных процессов используют два альтернативных метода исследования и анализа понятий ТМ: спектральный (Budeanu, Quade, Пухов, Emanuel, Szarecki, Шидловский, Кузнецов, Lev-Ari и Stanković и др.) и временной (Buchholz, Fryze, Depenbrock, Демирчан, Маевский, Nabae и Akagi, Willems, Watanabe и Aredes, Tolber, Тонкаль и Новосельцев и др.).

Временной метод анализа основан на специальном разложении 3-фазного тока на ортогональные составляющие. Одна из компонент такого специального разложения определяет активный ток, который после компенсации остается в цепи источника и обеспечивает поставку ЭЭ активной мощности. Временной метод использует два подхода исследования 3-фазных процессов. Первый подход рассматривает 3-фазные процессы как 3-мерные кривые на интервале усреднения, связан с обобщением на многофазные процессы метода Fryze, и использует интегральные мощности (ИМ). Второй подход основан на мгновенных энергетических характеристиках: классической (скалярной) ММ и новой векторной ММ (кросс-векторная теория). Подход имеет практическую значимость и привел к разработке так называемых активных фильтров. Однако, даже для синусоидального режима математические связи между новыми ММ и классическими (ИМ) спектрального подхода до конца не установлены [1].

**Цель работы** состоит в установлении связи между ММ и ИМ и получении комплексной формы скалярной и векторной ММ для классификации несинусоидальных режимов в 3-фазной 4-проводной схеме электроснабжения в терминах спектрального подхода.

Используемая методология основана на векторном подходе, который с единых позиций позволяет анализировать энергетические характеристики как для 4-проводных, так и для 3-проводных цепей, как в синусоидальном, так и несинусоидальном режиме, как во временной, так и частотной области.

**Скалярная ММ.** При рассмотрении 3-фазной 4-проводной цепи полагаем, что напряжения в фазах измеряются относительно нейтрали (рис. 1). В каждый момент времени мгновенные значения (*м.з.*) напряжений (относительно «нейтрального» проводника) и *м.з.* токов в фазах рассматриваются как 3-мерные вектора арифметического 3-мерного пространства  $R^{(3)}$

$$\mathbf{u}(t) = [u_a(t) \ u_b(t) \ u_c(t)]^T, \quad \mathbf{i}(t) = [i_a(t) \ i_b(t) \ i_c(t)]^T, \quad (1)$$

здесь и дальше  $\tau$  – знак транспонирования.

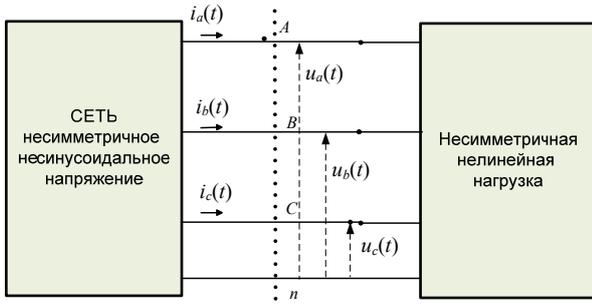


Рис. 1. Энергетические процессы в 4-проводной схеме электроснабжения

Определение нормы в 3-мерном арифметическом пространстве  $R^{(3)}$  в каждый момент времени определяет норму вектора м.з. тока и напряжения

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}(t)| = \sqrt{\mathbf{u}^\tau \mathbf{u}} = \sqrt{u_a(t)^2 + u_b(t)^2 + u_c(t)^2}, \quad (2)$$

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{i}(t)| = \sqrt{\mathbf{i}^\tau \mathbf{i}} = \sqrt{i_a(t)^2 + i_b(t)^2 + i_c(t)^2}. \quad (3)$$

Локальное состояние энергетического режима в трехфазном сечении  $\langle A, B, C \rangle$  характеризуется мгновенной мощностью (ММ)

$$p(t) = u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t) = \frac{dW}{dt}. \quad (4)$$

ММ определена как сумма попарных произведений м.з. тока и напряжения трех фаз и определяет скорость передачи энергии  $W = W(t)$  в сечении  $\langle A, B, C \rangle$ . Как следует из (4), в каждый момент времени ММ равна скалярному произведению (СП) векторов (1) в пространстве  $R^{(3)}$

$$p(t) = (\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \mathbf{i}^\tau \mathbf{u} = [i_a(t) \ i_b(t) \ i_c(t)] \cdot \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

**Векторная ММ и уравнение ММ.** Произведение норм векторов (2) и (3) определяет кажущуюся (полную) ММ энергетического режима

$$s(t) = |\mathbf{i}(t)| \cdot |\mathbf{u}(t)| = \mathbf{i}^\tau \mathbf{u}. \quad (6)$$

В 3-мерном пространстве  $R^{(3)}$  для любой пары векторов справедливо неравенство Коши-Шварца [2], что для векторов (1) дает импликацию

$$|\mathbf{i}^\tau \mathbf{u}(t)| \leq |\mathbf{i}(t)| \cdot |\mathbf{u}(t)| \Rightarrow p(t) \leq s(t). \quad (7)$$

Векторная ММ – это вектор пространства  $R^{(3)}$ , который вводится как векторное произведение (ВП) м.з. векторов (1) токов и напряжений [1]

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{i} \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} i_b u_c - i_c u_b \\ i_c u_a - i_a u_c \\ i_a u_b - i_b u_a \end{bmatrix}^\tau. \quad (8)$$

Определитель Грама [2], составленный из попарных СП векторов м.з. тока и напряжения, равен квадрату нормы ВП векторов м.з. токов и напряжений – скалярному квадрату векторной ММ (8)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}^\tau \mathbf{i} & \mathbf{i}^\tau \mathbf{u} \\ \mathbf{i}^\tau \mathbf{u} & \mathbf{u}^\tau \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \times \mathbf{u} \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}^\tau \begin{bmatrix} \mathbf{i} \times \mathbf{u} \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = |\mathbf{q}(t)|^2. \quad (9)$$

Геометрический смысл определителя Грама: «квадрат площади параллелограмма, который образован векторами напряжения и тока» иллюстрируется на рис. 2.

Площадь такого «мгновенного» параллелограмма равна

$$q(t) = |\mathbf{i}(t)| \cdot |\mathbf{u}(t)| \cdot \sin \varphi(t) = s(t) \cdot \sin \varphi(t), \quad (10)$$

здесь  $\varphi(t)$  – мгновенный угол между векторами (1) в пространстве  $R^{(3)}$  в момент времени  $t$ .

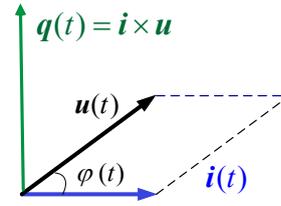


Рис. 2. Вектор тока, вектор напряжения и векторная ММ

Площадь параллелограмма равна нулю, если образующие его вектора параллельны (коллинеарны,  $\mathbf{i} \parallel \mathbf{u}$ ), когда кажущая ММ равна скалярной ММ. Поэтому норму ВП тока и напряжения интерпретируется как *неактивная* ММ. Чтобы подчеркнуть эту интерпретацию, скалярную ММ (5) называют *активной* ММ. Разложение (9) инвариантно относительно перестановки векторов  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$ , однако  $\mathbf{i} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{i}$ . В данной работе (как и в [1]) *векторная (неактивная) ММ* определяется согласно (8). Вектора  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{u}$  образуют правую тройку.

Определитель Грама в каждый момент квадратично дополняет скалярную ММ до полной (*кажущейся*) ММ (6)

$$\underbrace{(\mathbf{i}^\tau \mathbf{i})(\mathbf{u}^\tau \mathbf{u})}_{i^2(t) u^2(t)} = \underbrace{(\mathbf{i}^\tau \mathbf{u})}_{p(t)} + \underbrace{[\mathbf{i} \times \mathbf{u}]^\tau [\mathbf{i} \times \mathbf{u}]}_{q^2(t)} \quad (11)$$

дает уравнение мощности для мгновенных мощностей

$$s^2(t) = p^2(t) + q^2(t), \quad (12)$$

которое иллюстрируется на рис. 3.

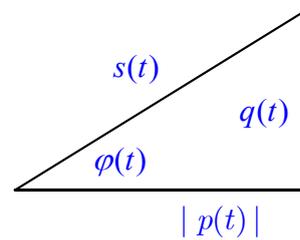


Рис. 3. Треугольник мгновенных мощностей

В треугольнике ММ два катета соответствуют активной и неактивной мгновенным мощностям. Если неактивная ММ обусловлена  $\sin \varphi(t)$ , то активная ММ обусловлена  $\cos \varphi(t)$

$$p(t) = (\mathbf{i}^\tau \mathbf{u}) = \underbrace{|\mathbf{i}| |\mathbf{u}|}_{s(t)} \cdot \underbrace{\left| \frac{(\mathbf{i}^\tau \mathbf{u})}{|\mathbf{i} \times \mathbf{u}|} \right|}_{\cos \varphi(t)} = s(t) \cdot \cos \varphi(t). \quad (13)$$

Угол  $\varphi(t)$  в треугольнике ММ равен введенному ранее углу между векторами тока и напряжения. Если активная ММ (4) характеризует эффективность энергетического режима, то векторная ММ (13) характеризует потери энергетического режима.

**Установившийся неуравновешенный и несбалансированный энергетический режим.** Установившийся энергетический режим в 3-фазном сечении  $\langle A, B, C \rangle$  определен 3-мерными  $T$ -периодическими кривыми процессов тока и напряжения:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t+T), \quad \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}(t+T). \quad (14)$$

Для  $T$ -периодических процессов корректно определено (интегральное) среднее ММ и однозначно выделяется переменная составляющая

$$P = \bar{p} = \frac{1}{T} \int_p^{v+T} p(t) dt, \quad p(t) = \bar{p} + \tilde{p}(t). \quad (15)$$

Если ММ не имеет переменной (пульсирующей) компоненты  $\tilde{p}(t) \equiv 0$ , то режим *уравновешен*. В общем случае  $\tilde{p}(t) = p(t) - \bar{p} \neq 0$  и установившийся режим *неуравновешен*.

Подобно (15) в векторной ММ можно выделить векторные составляющие: постоянную и переменную

$$\bar{q} = \frac{1}{T} \int_q^{v+T} q(t) dt; \quad q(t) = \bar{q} + \tilde{q}(t). \quad (16)$$

Режим, при котором *векторная* ММ не имеет переменной составляющей  $\tilde{q} = \tilde{q}(t) \equiv 0$ , назван *сбалансированным режимом* [1].

Режим *реально сбалансирован*, если векторная ММ (*неактивная* ММ) тождественно равна нулю

$$q(t) \equiv 0 \Leftrightarrow (\bar{q} = 0) \& (\tilde{q}(t) \equiv 0). \quad (17)$$

Тем самым, режим *реально сбалансирован* ( $q(t) \equiv |q(t)| \equiv 0$ ), если в каждый момент (тождественно) вектора тока и напряжения (1) параллельны в арифметическом 3-мерном пространстве  $R^{(3)}$

$$q(t) \equiv 0 \Leftrightarrow i \parallel u \Leftrightarrow i(t) = y(t)u(t). \quad (18)$$

Скалярная величина  $y(t)$  (имеет размерность проводимости) не обязана быть константой.

Таким образом, пара мгновенных характеристик: скалярная (5) и векторная (8) классифицирует локальный энергетический режим в сечении  $\langle A, B, C \rangle$ .

**Спектральный анализ периодических процессов конечной энергии.** Множество 3-мерных (3-фазных)  $T$ -периодических векторных кривых

$$x(t) = [x_a(t) \ x_b(t) \ x_c(t)]^T, \quad (19)$$

с конечной интегрально-усредненной квадратичной величиной (нормой)

$$\|x\|^2 = \bar{x}^2 = \frac{1}{T} \int_x^{v+T} x(t)^T x(t) dt < \infty \quad (20)$$

образуют гильбертово бесконечномерное пространство 3-мерных кривых «конечной энергии»

$$L_2^{(3)}(T) = \{x(t), \ t \in (v, v+T) : \|x\| < \infty\}. \quad (21)$$

Для 3-фазных векторных кривых  $x(t)$ ,  $y(t) \in L_2^{(3)}(T)$  определено скалярное произведение

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_x^{v+T} x(t)^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_v^{v+T} (x(t), y(t)) dt \quad (22)$$

как интегральное среднее СП м.з. в 3-мерном пространстве  $R^{(3)}$ . Справедливо неравенство Коши-Шварца [2]

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (23)$$

$T$ -периодичная кривая  $x(t) = x(t+T)$  раскладывается в функциональный ряд 3-мерных гармонических составляющих – (синусный, косинусный, комплексный и т.д.) ряд Фурье

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_k(t) + \dots \quad (24)$$

Для комплексного ряда Фурье 3-мерная векторная гармоника  $x_k(t) \in L_2^{(3)}(T)$   $k$ -порядка

$$x_k(t) = \sqrt{2} \Re e [X_k e^{jk\omega t}], \quad (T\omega = 2\pi), \quad (25)$$

вычисляется с помощью 3-мерного комплексного коэффициента (3-комплекса)

$$X_k = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_x^{v+T} x(t) e^{-jk\omega t}, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

где  $X_k = [\dot{X}_{a,k} \ \dot{X}_{b,k} \ \dot{X}_{c,k}]^T$  – трехмерный вектор с комплексными координатами,  $\Re e(\dot{z})$  – реальная часть комплексного числа  $\dot{z}$ .

Множество 3-комплексов составляют 3-мерное комплексное пространство  $C^{(3)}$  с комплексным скалярным произведением [1]

$$(X, Y) = X^T Y^*, \quad (27)$$

\* – символ комплексного сопряжения (КС). В дальнейшем будем считать, что постоянная составляющая в комплексном ряде Фурье отсутствует ( $X_0 = 0$ )

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{2} \Re e [X_k e^{jk\omega t}]}_{x_k(t)}. \quad (28)$$

**Комплексная форма скалярной ММ.** Спектральный анализ  $T$ -периодических энергетических процессов тока и напряжения использует их представление комплексным рядом Фурье

$$u(t) = \sqrt{2} \Re e \sum_{k \geq 1} U_k e^{jk\omega t}, \quad (29)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \Re e \sum_{k \geq 1} I_k e^{jk\omega t}. \quad (30)$$

Формула Эйлера [2] представляет компоненты разложения 3-кривых напряжения (29) и тока (30) с помощью КС 3-комплекса

$$i_k(t) = \frac{1}{2} [I_k e^{jk\omega t} + I_k^* e^{-jk\omega t}], \quad (31)$$

$$u_k(t) = \frac{1}{2} [U_k e^{jk\omega t} + U_k^* e^{-jk\omega t}]. \quad (32)$$

В силу линейности скалярного произведения, ММ равна сумме парциальных скалярных ММ векторных гармоник тока  $k$ -порядка и напряжения  $m$ -порядка.

$$p(t) = (i, u) = i^T u = \sum_{k,m} \underbrace{i_k(t)^T u_m(t)}_{p_{k,m}(t)} = \sum_{k,m} p_{k,m}(t). \quad (33)$$

Представления (31), (32) векторной гармоники с помощью 3-комплекса и его КС для м.з. произведения векторных гармоник тока  $k$ -порядка и напряжения  $m$ -порядка дает тождество

$$p_{k,m}(t) = \Re e \left[ \underbrace{I_k^T U_m^*}_{\dot{N}_{k-m}} e^{j(k-m)\omega t} + \underbrace{I_k^T U_m}_{\dot{N}_{k+m}} e^{j(k+m)\omega t} \right]. \quad (34)$$

Если гармоники тока и напряжения одного порядка ( $m = k$ ), то их скалярная ММ имеет как постоянную, так и переменную составляющие

$$p_k(t) = \Re e \left[ \underbrace{U_k^T I_k^*}_{\dot{S}G_k} + \underbrace{I_k^T U_k}_{\dot{N}_k} e^{j2k\omega t} \right]. \quad (35)$$

Скалярная ММ (4) представляется через 3-комплексы тока и напряжения как

$$p(t) = \Re e \left\{ \sum_{k \geq 1} [\dot{S}G_k + \dot{N}_k e^{j2k\omega t}] \right\} + \Re e \left\{ \sum_{k \neq m} [\dot{N}_{k-m} e^{j(k-m)\omega t} + \dot{N}_{k+m} e^{j(k+m)\omega t}] \right\} \quad (36)$$

и имеет постоянную и переменную (пульсирующую) составляющую.

Постоянная составляющая

$$\bar{p} = \sum_{k \geq 1} \Re e [\dot{S}G_k] = \sum_{k \geq 1} P_k = P \quad (37)$$

равна активной (средней) мощности несинусоидально-го режима и представляется как реальная часть комплексной (геометрической) мощности всех гармоник

$$\dot{S}G = \sum_{k \geq 1} \underbrace{U_k^\tau I_k^*}_{\dot{S}G_k} = \sum_{k \geq 1} \dot{S}G_k = P + jQ. \quad (38)$$

Комплексная (геометрическая) мощность (38) равна сумме комплексных мощностей гармонических составляющих

$$\dot{S}G_k = U_k^\tau I_k^* = (U_k, I_k) = P_k + jQ_k = S_{G_k} \cdot e^{j\varphi_k}. \quad (39)$$

Комплексная мощность (39) векторной гармоники тока и напряжения  $k$ -порядка равна комплексному скалярному произведению (27) 3-комплекса напряжения и 3-комплекса тока  $k$ -порядка в комплексном 3-мерном пространстве  $C^{(3)}$ .

Мнимая часть комплексной мощности (38)

$$Q = \Im m \sum_{k \geq 1} \underbrace{U_k^\tau I_k^*}_{\dot{S}G_k} = \sum_{k \geq 1} \underbrace{\Im m[U_k^\tau I_k^*]}_{Q_k} = \sum_{k \geq 1} Q_k$$

определяет реактивную мощность несинусоидального режима 3-фазного сечения  $\langle A, B, C \rangle$  и дает обобщение реактивной мощности по Будеану на 3-фазные процессы

$$Q = \sum_{k \geq 1} \underbrace{\Im m[U_k^\tau I_k^*]}_{Q_k} = \sum_{k \geq 1} Q_k = \sum_{k \geq 1} S_{Q_k} \sin \varphi_k. \quad (40)$$

Комплексные *мощности пульсаций* скалярной ММ:

- гармоник  $k$ -порядка четной частоты  $2k\omega$

$$\dot{N}_k = I_k^\tau U_k; \quad (41)$$

- гармоник  $k$ -порядка и  $m$ -порядка суммарной и разностной частоты

$$\dot{N}_{k+m} = I_k^\tau U_m, \quad \dot{N}_{k-m} = U_k^\tau I_m^* \quad (42)$$

определяют переменную (пульсирующую) составляющую скалярной ММ

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) = & \Re e \left\{ \sum_{k \geq 1} \dot{N}_k e^{j2k\omega t} \right\} + \\ & + \Re e \left\{ \sum_{k \neq m} [\dot{N}_{k-m} e^{j(k-m)\omega t} + \dot{N}_{k+m} e^{j(k+m)\omega t}] \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Если три типа комплексных мощностей равны нулю

$$\dot{N}_k = \dot{N}_{k+m} = \dot{N}_{k-m} = 0, \quad (k, m = 1, 2, \dots),$$

то режим уравновешен.

Комплексная форма скалярной ММ несинусоидального режима (36) расширяет комплексную форму скалярной ММ несимметричного синусоидального режима [1]

$$p(t) = \Re e \{ \dot{S}G_1 + \dot{N}_1 e^{j2k\omega t} \},$$

где  $\dot{S}G_1 = U_1^\tau I_1^*$ ,  $\dot{N}_1 = I_1^\tau U_1$  – комплексная (геометрическая) мощность и комплексная *мощность пульсаций* фундаментальных гармоник тока и напряжения.

**Векторная мгновенная мощность несинусоидального режима.** В силу линейности векторного произведения, векторная ММ

$$q(t) = i \times u = \sum_{k,m} \underbrace{i_k \times u_m}_{q_{k,m}(t)} = \sum_{k,m} q_{k,m}(t) \quad (44)$$

равна сумме векторных произведений гармоник тока  $k$ -порядка и напряжения  $m$ -порядка

$$q_{k,m}(t) = \Re e \left[ \underbrace{I_k \times U_m^*}_{D_{k-m}} e^{j(k-m)\omega t} + \underbrace{I_k \times U_m}_{D_{k+m}} e^{j(k+m)\omega t} \right]. \quad (45)$$

Если гармоники тока и гармоники напряжения одного порядка  $m = k$ , то их ВП имеет как постоянную, так и переменную составляющие

$$q_k(t) = \Re e \left[ \underbrace{I_k \times U_k^*}_{K_k} + \underbrace{I_k \times U_k}_{D_k} e^{j2k\omega t} \right]. \quad (46)$$

Комплексная форма векторной ММ представляется через 3-комплексы гармоник как

$$\begin{aligned} q(t) = & \Re e \left\{ \sum_{k \geq 1} [K_k + D_k e^{j2k\omega t}] \right\} + \\ & + \Re e \left\{ \sum_{k \neq m} [D_{k-m} e^{j(k-m)\omega t} + D_{k+m} e^{j(k+m)\omega t}] \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

3-комплексы *сбалансированной* мощности гармоник тока и напряжения  $k$ -порядка

$$K_k = I_k \times U_k^* \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (48)$$

определяют постоянную составляющую векторной ММ.

Переменную (пульсирующую) составляющую векторной ММ определяют:

- 3-комплекс мощности *небаланса* гармоники тока и напряжения  $k$ -порядка удвоенной частоты  $2k\omega$

$$D_k = I_k \times U_k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (49.a)$$

- 3-комплексы мощности *небаланса* гармоники тока  $k$ -порядка и гармоники напряжения  $m$ -порядка суммарной и разностной частоты  $(k, m = 1, 2, \dots)$ :

$$D_{k+m} = I_k \times U_m, \quad D_{k-m} = I_k \times U_m^*. \quad (49.b)$$

Если 3-комплексы (49) равны нулю

$$D_k = D_{k+m} = D_{k-m} = 0, \quad (50)$$

то режим сбалансирован.

Если дополнительно к условиям (50) выполнено

$$\Re e K_k = \Re e [I_k \times U_k^*] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (51)$$

то режим *реально сбалансирован*.

Комплексная форма векторной мгновенной мощности несинусоидального режима (47) расширяет комплексную форму векторной ММ синусоидального несимметричного режима [1]

$$q(t) = \Re e \{ K_1 + D_1 e^{j2\omega t} \},$$

где  $K_1 = I_1 \times U_1^*$ ,  $D_1 = I_1 \times U_1$  – 3-комплексы *сбалансированной* мощности и мощности *небаланса* фундаментальной гармоники тока и напряжения.

**Уравнения комплексных мощностей несинусоидального режима.** Для квадрата (кажущей) полной мощности справедливо равенство

$$S^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2 \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} I_m^2 \right) = \sum_{m=k}^{\infty} I_m^2 \cdot U_m^2 + \sum_{m \neq k}^{\infty} I_m^2 U_k^2. \quad (52)$$

Связь скалярного и векторного произведения 3-комплексов  $X, Y \in C^{(3)}$  определено тождеством [1]

$$|X|^2 |Y|^2 = |X^\tau Y^*|^2 + |X \times Y|^2, \quad (53)$$

которое расширяет соответствующее тождество векторной алгебры вещественных векторов [2].

При  $X = U_k$ ,  $Y = I_m$  из тождества (53) следуют равенства

$$I_m^2 U_k^2 = |U_k|^2 |I_m|^2 = \underbrace{|U_k^\tau I_m^*|^2}_{\dot{N}_{k-m}} + \underbrace{|U_k \times I_m|^2}_{D_{k+m}}, \quad (54)$$

которые при  $m = k$  дают

$$I_k^2 U_k^2 = |U_k|^2 |I_k|^2 = \underbrace{|U_k^\tau I_k^*|^2}_{S_{G_k}} + \underbrace{|U_k \times I_k|^2}_{D_k}. \quad (55)$$

Разложение квадрата полной мощности (52) с учетом (54, 55) дает уравнение мощности для комплексных скалярных и векторных мощностей, куда входит активная (37) и реактивная (40) мощность несинусоидального режима

$$S^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (P_k^2 + Q_k^2 + D_k^2) + \sum_{m \neq k} (N_{k-m}^2 + D_{k+m}^2). \quad (56)$$

Уравнение мощности (56) обобщает уравнение мощности для синусоидального, несимметричного режима [1]

$$S^2 = P_1^2 + Q_1^2 + D_1^2. \quad (57)$$

В уравнение (56) входят не все комплексные скалярные и векторные мощности комплексной формы скалярной (36) и векторной ММ (47).

Если использовать пару последовательностей  $\{U_k\}_{k \geq 1}$ ,  $\{I_m^*\}_{m \geq 1}$ , то справедливо дополнительное уравнение для комплексных скалярных и векторных мощностей, не вошедших в (56). При  $X = U_k$ ,  $Y = I_m^*$  из тождества (53) следуют равенства

$$|U_k|^2 |I_m|^2 = \underbrace{|U_k^\tau I_m^*|^2}_{N_{k+m}} + \underbrace{|U_k \times I_m^*|^2}_{D_{k-m}}. \quad (58)$$

При  $m = k$  равенства (58) дают

$$|U_m|^2 |I_m|^2 = \underbrace{|U_m^\tau I_m^*|^2}_{N_m} + \underbrace{|U_m \times I_m^*|^2}_{K_m}. \quad (59)$$

Разложение квадрата полной мощности (52) с учетом (58, 59) дает дополнительное уравнение для комплексных скалярных и векторных мощностей

$$S^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (K_m^2 + N_m^2) + \sum_{m \neq k} (N_{k+m}^2 + D_{k-m}^2). \quad (60)$$

Можно показать, что для каждой гармоники справедлива импликация

$$D_m = 0 \Rightarrow K_m^2 + N_m^2 = P_m^2 + Q_m^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Полученное уравнение мощностей (60) обобщает дополнительное уравнение для синусоидального несимметричного режима [1]

$$S^2 = K_1^2 + N_1^2. \quad (61)$$

Как показано в [1] в синусоидальном режиме уравнения (57), (61) обусловлены двумя различными ортогональными разложениями 3-фазного тока. Задача построения ортогонального разложения тока в синусоидальном режиме используется для решения задачи компенсации неактивных составляющих полной мощности [3]. Построение ортогонального разложения, которое ассоциируется с уравнениями мощностей (56), (60) выходит за рамки данной работы и требует дальнейшего исследования.

Практическая ценность полученных уравнений заключается в возможности их использования для повышения, как качества поставки, так и качества потребления электроэнергии.

**Выводы.** Для 3-фазной 4-проводной сети с несинусоидальными (независимо от их симметрии) процессами получены комплексные формы активной (скалярной) ММ и (неактивной) векторной ММ.

Получены уравнения мощностей для комплексных скалярных и комплексных векторных мощностей несинусоидальных режимов. Уравнения мощностей обобщают уравнения мощностей для синусоидальных режимов в 4-проводной сети.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сиротин Ю.А. Векторная мгновенная мощность и энергетические режимы трехфазных цепей // Технічна електродинаміка. – 2013. – №6. – С. 57-65.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
3. Sirotin Iu.A. Non-pulsed mode of supply in a three-phase system at asymmetrical voltage // Przegląd Elektrotechniczny. – 2013. – №7. – pp. 54-58.

#### REFERENCES

1. Sirotin Iu.A. Vectorial instantaneous power and energy modes in three-phase circuits. *Tekhnichna elektrodynamika – Technical electrodynamic*, 2013, no.6, pp. 57-65. (Rus).
2. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical handbook for scientists and engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 832 p. (Rus).
3. Sirotin Iu.A. Non-pulsed mode of supply in a three-phase system at asymmetrical voltage. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2013, no.7, pp. 54-58.

Поступила (received) 16.10.2015

Сиротин Юрий Александрович<sup>1</sup>, д.т.н., проф.,  
Иерусалимова Татьяна Сергеевна<sup>1</sup>, ассистент,  
<sup>1</sup>Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»,  
61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,  
e-mail: yuri\_sirotin@ukr.net, Ierusalimovat@mail.ru

Iu.A. Sirotin<sup>1</sup>, T.S. Ierusalimova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,  
21, Frunze Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

#### Instantaneous and integral power equations of nonsinusoidal 3-phase processes.

**Purpose.** To identify the mathematical relationship between the instantaneous powers (classical and vectorial) and integral powers in non-sinusoidal mode and to get complex form of instantaneous powers in 3-phase 4-wire power supply in terms of the spectral approach. **Methodology.** We have applied the vector approach with one voice allows you to analyze the energy characteristics of 3-phase power supply circuits (for 4-wire and 3-wire circuits) in sinusoidal and non-sinusoidal mode, both the time domain and frequency domain. We have used 3-dimensional representation of the energy waveforms with the complex multi-dimensional Fourier series. **Results.** For 4-wire network with a non-sinusoidal (regardless of their symmetry) processes, we have developed the mathematical model one-dimensional representations of the complex form for the active (scalar) instantaneous power (IP) and 3-dimensional form (inactive) vectorial IP. It is possible to obtain two dual integral power equations for complex scalar and vector integrated power of non-sinusoidal modes. The power equations generalize the equations of sinusoidal modes for 4-wire network. **Originality.** In addition to the classification of energy local regimes in the time domain for the first time we spent the classification of non-sinusoidal modes in the spectral region and showed the value and importance of the classification of regimes based on the instantaneous powers. **Practical value.** The practical value the obtained equations is the possibility of their use for improving the quality of electricity supply and the quality electricity consumption. References 3, figures 3.

**Key words:** three-phase circuit, classical instantaneous power, vector instantaneous power, complex 3-dimensional Fourier series, active and reactive power, complex vector power, apparent power, complex pulsation power, power equation, unbalanced mode, non-sinusoidal mode, 3-phasor.