

Є.І. Сокол, М.М. Резинкіна, О.В. Сосіна, О.Г. Гриб

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ ПРИ НАЯВНОСТІ КРИВОЛІНІЙНОЇ ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ МІЖ ПРОВІДНИМ ТА НЕПРОВІДНИМ СЕРЕДОВИЩАМИ

Описаны принципы учета криволинейных границ раздела при использовании метода конечных объемов для расчета усиления электрического поля на вершинах проводящих стержней. С помощью проведенных расчетов получена зависимость максимальной напряженности электрического поля от высоты и радиуса скругления вершин стержней. В результате аппроксимации данной зависимости полиномом записано аналитическое выражение для напряженности внешнего электрического поля, при приложении которого к проводящему объекту определенной высоты и радиуса скругления вершины на нем развивается коронный разряд. Бібл. 13, рис. 4.

Ключевые слова: скругленные вершины, криволинейные границы, метод конечных объемов, расчетная сетка, напряженность электрического поля.

Описано принципы учета криволинейных границ раздела при использовании метода конечных объемов для расчета усиления электрического поля на вершинах проводящих стержней. За допомогою проведених розрахунків отримана залежність максимальної напруженості електричного поля від висоти та радіуса округлення вершин стержнів. У результаті апроксимації даної залежності поліномом записано аналітичний вираз для напруженості зовнішнього електричного поля, при прикладенні якого до провідного об'єкта певної висоти і радіуса округлення вершини на ньому розвивається коронний розряд. Бібл. 13, рис. 4.

Ключові слова: округлені вершини, криволінійні границі, метод скінчених об'ємів, розрахункова сітка, напруженість електричного поля.

Введення. У ряді практично важливих випадків необхідна інформація про характер розподілу та рівні максимальної напруженості електричного поля (ЕП) в околиці вершин провідних стрижнів. Застосування систем, що містять провідні стрижні, є одним з можливих способів практичної реалізації метаматеріалів, що знаходять широке розповсюдження останнім часом [1]. Системи «стрижень – площа» використовують у високовольтній імпульсній техніці для ініціації розрядів у різних середовищах [2]. До цієї ж категорії об'єктів відносяться елементи електроенергетичних об'єктів, що можуть бути змодельовані стрижнями з вершинами різної форми. Зокрема, необхідна інформація про напруженості зовнішнього електричного поля, за умови прикладення яких виникають коронні розряди.

Як правило, вершини використовуваних у техніці стрижнів є округленими. При розрахунку ЕП у таких системах виникає проблема урахування кривизни поверхні вершин стрижнів. Застосування в цьому випадку методу скінчених елементів не вирішує повною мірою проблему, оскільки елементи, що використовуються (наприклад, трикутники) мають кути, а, значить, при розрахунку напруженість ЕП на них буде завищеною в порівнянні з реальними значеннями. Враховуючи, що основна частина стрижня є прямолінійною, для розрахунку доцільно застосовувати скінченно-різницеви методи [3]. Однак відомо, що використання прямокутної розрахункової сітки для опису ЕП у системах з криволінійними поверхнями призводить до істотного збільшення розрахованих рівнів напруженості ЕП, що не має місця в дійсності [4]. Причому, подрібнення розрахункової сітки тільки погіршує ситуацію. Для того щоб вирішити дану проблему, застосовуються різні прийоми, наприклад, представлення похідних у вигляді поліномів, а не кінцевих різниць [5]. Однак такий підхід пов'язаний з ускладненням задачі, то ж втрачаються переваги скінченно-різницеви методів: простота і можливість врахування нелінійних парамет-

рів середовищ. Для розрахунку електромагнітних полів у подібних системах застосовуються також так звані конформальні схеми, що передбачають усереднення матеріальних параметрів середовищ по об'ємам осередків, розташованих на криволінійних межах їх розділу [6]. Використання даного підходу для середовищ, матеріальні параметри яких відрізняються не більш ніж в 5-10 разів, дає досить добрі результати [6-8]. Якщо ж дані величини відрізняються на кілька порядків (наприклад, при розташуванні провідного стрижня в повітрі), то, як буде показано нижче, використання даного методу виявляється неефективним.

Метою роботи є розробка спрощеного методу врахування криволінійних границь розділу між провідним та непровідним середовищами при використанні прямокутних розрахункових сіток щодо розрахунку електромагнітних полів у відповідних системах та використання даного методу для оцінки того, яким радіусом слід округляти гострі кромки на об'єктах, що знаходяться в зоні дії електричних полів, для того, щоб на них не виникали коронні розряди.

Моделювання електричних полів при наявності криволінійних границь розділу. Будемо розглядати випадки, коли відстані, на яких змінюється ЕП, істотно перевищують характерні розміри розглядуваних об'єктів, тому розрахунок може бути виконаний у квазістационарному наближенні. Рівняння, що описує розподіл ЕП, отримуємо в такий спосіб. Запишемо рівняння Максвелла у вигляді [9]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

де \vec{H} , \vec{E} – напруженості магнітного та електричного полів відповідно; $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$; $\epsilon_0 = 0.885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м; ϵ – відносна діелектрична проникність; γ – питома електропровідність.

Будемо використовувати для чисельного розрахунку метод скінченних об'ємів, при використанні якого на розглядану область наноситься прямокутна розрахункова сітка, а розв'язуване різницеве рівняння одержують за допомогою законів збереження. Для цього візьмемо дивергенцію від обох частин (1), урахувавши, що в сталому режимі другий доданок у правій частині близький до нуля. Потім проінтегруємо отримане рівняння по об'ємах елементарних осередків, на які розбита розрахункова область, і використаємо підстановку $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ (де ϕ – електричний потенціал). Остаточно одержимо:

$$\oint_S -\frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot \gamma ds = 0, \quad (2)$$

де S – сторони паралелепіпеда, які ділять навпіл відстані між сусідніми вузлами; n – напрямок нормалі до контуру інтегрування.

Зупинимося докладніше на розрахунку ЕП біля округлених вершин стрижнів. При використанні методу скінченних об'ємів вузли, у яких розраховуються значення потенціалів, слід розташовувати на межах розділу середовищ [8]. Це дозволяє врахувати граничні умови автоматично, не задаючи їх окремими рівняннями.

Пропонується використовувати такий підхід до одержання рішень для напруженостей ЕП біля криволінійних поверхонь розділу середовищ. Врахуємо, що розглянута система містить провідне (стрижень) і непровідне (повітря) середовища. Причому, для квазі-стаціонарного випадку потенціал провідного об'єкта можна вважати постійним. Будемо розглядати тривимірні об'єкти. Спочатку розглянемо випадок прямолінійної границі розділу середовищ (див. рис. 1,а).

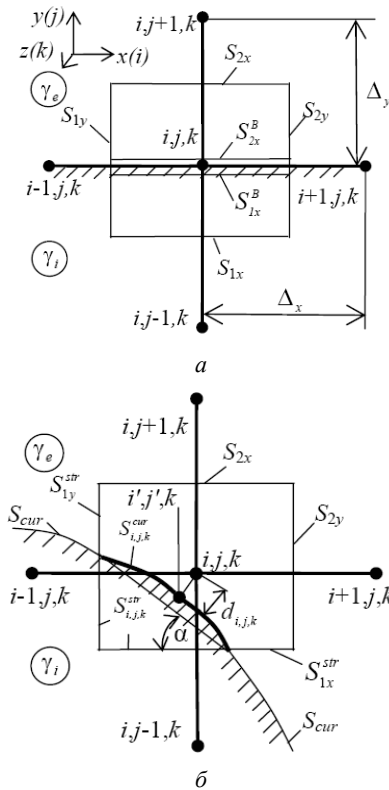


Рис. 1. Перетин осередку розрахункової схеми площиною $Z=\text{const}$ у випадку прямолінійної (а) і криволінійної (б) границь розділу середовищ

Перетин $Z = \text{const}$ замкнутого контуру площиною S , по якому здійснюється інтегрування розв'язаного рівняння (2), може бути представлений у виді чотирьох площин, перпендикулярних компонентам напруженості ЕП: S_{1x} і S_{2x} – у напрямку, паралельному осі Ox , а також S_{1y} і S_{2y} – у напрямку, паралельному осі Oy .

Це можливо, оскільки інтегрування (2) по поверхнях S_{1x}^B і S_{2x}^B , які розташовані впритул до границі розділу середовищ по обидві сторони від неї, у цьому випадку може бути замінено інтегруванням по S_{1x} і S_{2x} .

Така заміна можлива, бо площини, по яких відбувається інтегрування, рівні між собою: $S_{1x}^B = S_{1x} = S_{2x}^B = S_{2x} = \Delta_x$ (де Δ_x – крок по простору у напрямку осі Ox), а різницеві аналоги y - x компонент напруженостей ЕП по обидві сторони від границі розділу: $E_{y_{ij}}^+$ і $E_{y_{ij}}^-$ визначаються подібними виразами: як похідні кроком назад або кроком уперед при інтегруванні по S_{1x}^B і S_{2x}^B або як центральні похідні при інтегруванні по S_{1x} і S_{2x} :

$$E_{y_{ij,k}}^+ = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \approx -\frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta_y},$$

$$E_{y_{ij,k}}^- = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \approx -\frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta_y}, \quad (3)$$

де $\phi_{i,j,k}$ – потенціал вузла (i, j, k) ; Δ_y – крок по простору у напрямку осі Oy .

Запишемо (2) у різницевій формі як суму інтегралів по площинам, перпендикулярних осям Ox і Oy , урахувавши, що $\gamma_e \ll \gamma_i$, а значить $\gamma_i + \gamma_e \approx \gamma_i$ (де γ_i, γ_e – електропровідність провідного і непровідного середовищ відповідно):

$$\oint_S -\frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot \gamma ds \approx (F_{y2} - F_{y1}) + (F_{x2} - F_{x1}), \quad (4)$$

$$\text{де } F_{y1} = -\gamma_i \cdot \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta_y} \cdot S_{1y}; \quad (5)$$

$$F_{y2} = -\gamma_e \cdot \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta_y} \cdot S_{2y}; \quad (6)$$

$$F_{x1} \approx -0.5 \cdot \gamma_i \cdot \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta_x} \cdot S_{1x}; \quad (7)$$

$$F_{x2} \approx -0.5 \cdot \gamma_i \cdot \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta_x} \cdot S_{2x}. \quad (8)$$

Розглянемо тепер (i, j, k) -ий осередок розрахункової системи, для якого S -контур інтегрування (2), включає ділянку $S_{i,j,k}^{cur}$ криволінійної границі розділу S^{cur} (див. рис. 1,б). Для того щоб врахувати наявність цієї ділянки при написанні різницевої схеми, будемо вважати, що $S_{i,j,k}^{cur}$ доповнює S до замкнутого контуру замість прямолінійної ділянки $S_{i,j,k}^{str}$, що проходить усередині провідного середовища. Як відзначалося вище, при прийнятих припущеннях потенціал усього

провідного об'єкта (стрижня) однаковий: позначимо його U_0 . Причому, значення потенціалів у вузлах, розташованих усередині провідного середовища, отримуються з рішення автоматично при завданні рівня потенціалу $\varphi = U_0$ на відповідній ділянці зовнішньої границі розрахункової області. Позначимо через En напруженість ЕП біля поверхні стрижня, спрямовану перпендикулярно до цієї поверхні. Оскільки потенціали всіх вузлів, розташованих усередині та на поверхні провідного середовища однакові, будемо вважати, що при визначенні En у вигляді різниці потенціалів замість вузлів, що знаходяться всередині провідного середовища (у нашому випадку $(i-1,j,k)$ і $(i,j-1,k)$ – див. рис. 1,б), може бути використаний вузол (i',j',k') , розташований на поверхні розділу середовищ у місці дотику перпендикуляра до цієї поверхні з вузла (i,j,k) :

$$En_{i,j,k} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \approx -\frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i',j',k'}}{d_{i,j,k}} = -\frac{\varphi_{i,j,k} - U_0}{d_{i,j,k}}, \quad (9)$$

де $d_{i,j,k}$ – відстань від вузла (i,j,k) до криволінійної поверхні розділу.

Вважаючи, що кривизна в напрямку осі Oz невелика, розкладемо En на x і y компоненти, вважаючи, що ділянка $S_{i,j,k}^{cur}$ нахилена до горизонталі під кутом α (див. рис. 1,б):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= E_x \approx En \cdot \sin\alpha, \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= E_y \approx En \cdot \cos\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Тоді доданки F_{x1} і F_{y1} в (4), для яких контур інтегрування рівняння (2) включає, у тому числі, криволінійні площини границі розділу, запишемо так:

$$F_{x1} \approx -\gamma_e \cdot \frac{\varphi_{i,j,k} - U_0}{d_{i,j,k}} \cdot \left\{ \sin\alpha \cdot S_{1y}^{str} \cdot [k_x + (1 - k_x)] + k_x \cdot S_{i,j,k}^{cur} \right\}, \quad (11)$$

$$F_{y1} \approx -\gamma_e \cdot \frac{\varphi_{i,j,k} - U_0}{d_{i,j,k}} \cdot \left\{ \cos\alpha \cdot S_{1x}^{str} \cdot [k_y + (1 - k_y)] + k_y \cdot S_{i,j,k}^{cur} \right\}, \quad (12)$$

де $k_x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha < \pi/4 \\ 1, & \text{якщо } \alpha > \pi/4 \end{cases}; k_y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha > \pi/4 \\ 1, & \text{якщо } \alpha < \pi/4 \end{cases};$

$S_{1x}^{str}, S_{1y}^{str}$ – площі прямолінійних ділянок контуру інтегрування S ; $S_{i,j,k}^{cur}$ – площа криволінійної ділянки S (див. рис. 1,б).

При написанні (11), (12) використовувався спрощений підхід, коли припускається, що при $\alpha > \pi/4$ ділянка $S_{i,j,k}^{cur}$ разом з ділянкою S_{1y} або S_{2x} (у нашому випадку це ділянка S_{1y}^{str}) доповнює частину контуру інтегрування, паралельну осі Oy . Якщо ж $\alpha < \pi/4$, то крива $S_{i,j,k}^{cur}$ вважається частиною контуру інтегрування, що доповнює разом з ділянкою S_{1x} або S_{2x} (у нашій випадку це відрізок S_{1x}^{str}) частину контуру інтегрування, паралельного осі Ox . Для розглянутого осередку (див. рис. 1,б) доданки F_{y2} і F_{x2} в (4) визначаються виразами (6) і (8), оскільки при їхньому отриманні криволінійні ділянки в контур інтегрування не входили. Знаходження довжини криволінійної ділянки $S_{i,j,k}^{cur}$, прямолінійних відрізків $S_{1x}^{str}, S_{1y}^{str}$, а також $d_{i,j,k}$

не представляє істотних труднощів і може бути виконано, наприклад, чисельно в результаті більш дрібної розбивки осередків, що лежать на границях розділу. Причому, завдяки запропонованому підходу, приграничні осередки, розташовані усередині провідного середовища, віртуально переміщуються на її поверхню при визначенні ЕП у непровідному середовищі. Таке «переміщення» не впливає на визначення ЕП всередині провідного середовища, оскільки його потенціал постійний.

Як правило, при використанні скінченно-різницевого методу криволінійна границя розділу середовищ заміняється ступінчастою апроксимуючою поверхнею [6]. Однак, це обумовлює появу при розрахунку локальних зон з підвищеною напруженістю ЕП, які в дійсності не мають місця [4]. Причому, рівні напруженості ЕП у зонах, що прилягають до кутів апроксимуючих криволінійну поверхню прямокутних осередків, будуть тим більше, чим менше крок просторової розрахункової сітки. Запропонований метод дозволив уникнути даної проблеми. На рис. 2 показані розраховані за допомогою описаного підходу розподіли напруженості ЕП на поверхні провідної сфери, що знаходиться в однорідному ЕП (див. пунктирну криву 2).

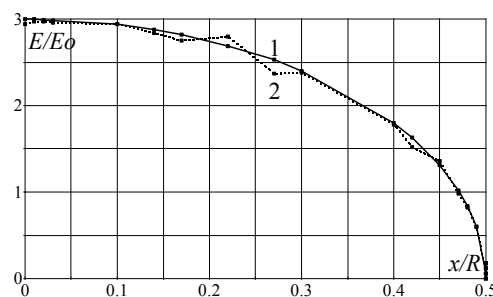


Рис. 2. Розраховані розподіли напруженості ЕП на поверхні провідної сфери радіусом R , що знаходиться в однорідному зовнішньому ЕП напруженістю E_0 : 1 – аналітичне рішення, 2 – рішення за допомогою запропонованого методу

Розрахунок проводився при кроці сітки $\Delta = 0.02 \cdot R$ (де R – радіус сфери). Рівні модуля напруженості ЕП в (i,j,k) -му вузлі визначалися за розрахованими потенціалами у вузлах сітки як усереднені значення по об'єму осередку:

$$|\vec{E}| = \sqrt{Ex_{i,j,k}^2 + Ey_{i,j,k}^2 + Ez_{i,j,k}^2}, \quad (13)$$

$$Ex_{i,j,k} \approx -0.5 \cdot \left(\frac{\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k}}{\Delta_x} + \frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}}{\Delta_x} \right);$$

$$Ey_{i,j,k} \approx -0.5 \cdot \left(\frac{\varphi_{i,j+1,k} - \varphi_{i,j,k}}{\Delta_y} + \frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j-1,k}}{\Delta_y} \right)$$

$$Ez_{i,j,k} \approx -0.5 \cdot \left(\frac{\varphi_{i+1,j,k+1} - \varphi_{i,j,k}}{\Delta_z} + \frac{\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i,j,k-1}}{\Delta_z} \right).$$

Для порівняння на тому ж рисунку (див. криву 1) показане аналітичне рішення для провідної сфери в однорідному зовнішньому ЕП [10]. Як видно з порівняння кривих 1 і 2, відносні відмінності рівнів напруженості ЕП для цих двох випадків досить невеликі: вони не перевищують 3%. Як показали розрахунки

з тим же кроком по простору, при ступінчастій апроксимації границі розділу середовищ відносні відмінності досягають майже 30 %.

Як відзначалося вище, для усунення даної проблеми застосовується ряд прийомів [4-6]. Всі вони є досить громіздкими, що істотно ускладнює їхню практичну реалізацію, на відміну від описаного підходу, не пов'язаного із введенням неортогональної сітки або підвищенням порядку апроксимації похідних.

Таким чином, застосування запропонованого підходу дозволяє врахувати як площу криволінійних ділянок границі розділу, так і відстані між розташованими в непровідному середовищі приграничними вузлами розрахункової сітки та границею розділу. Це можливо в результаті використання для отримання розв'язуваних рівнянь закону збереження (у нашому випадку заряду) за допомогою інтегрування вихідних диференціальних рівнянь по контурах осередків розрахункової схеми з урахуванням конфігурації границі розділу усередині кожного осередку.

Як показали проведені розрахунки, значення напруженості ЕП, отримані при використанні конформальної схеми [6], повністю збігаються з даними, отриманими при використанні ступінчастої апроксимації. Це пояснюється тим, що при настільки великій різниці між величинами питомої електропровідності провідного та непровідного середовищ (більше ніж на 5-6 порядків) зменшення в кілька разів еквівалентної електропровідності розташованих на границі розділу осередків, що містять провідне і непровідне середовище, практично не оказує впливу на розраховані рівні потенціалів.

Розрахунок ЕП в околиці провідного циліндричного стрижня. Описані вище підходи дозволяють виконати розрахунок електричного поля в околиці провідного циліндричного стрижня, що знаходиться в зовнішньому вертикально спрямованому ЕП напруженістю E_0 . Розрахункова система, яка містить провідний циліндричний стрижень із округленою вершиною 1, представлена на рис. 3.

Аналітичні рішення для напруженості ЕП у системах, що містять циліндричні стрижні з округленими вершинами, відсутні. Для знаходження розподілу ЕП використовуємо чисельний метод скінчених об'ємів [11] та запропонований вище підхід. Враховуючи осьову симетрію розглянутої системи, була використана циліндрична система координат. При цьому вважається, що вісь Oz збігається з віссю стрижня 1 і перпендикулярна поверхні землі 2 (див. рис. 3). Вважається також, що розрахункова область обмежена прямокутником зі сторонами $z = 0$, $z = Z_{max}$, $r = R_{max}$, $r = 0$ (див. рис. 3) і розбита на елементарні прямокутні осередки.

Для того щоб зменшити розрахункову область, на її межах уведено так звані добре погоджені шари (PML) [6] (див. 3, 4 на рис. 3). Дані шари виконують допоміжну функцію і потрібні для забезпечення швидкого та безвідбивного спадання збурювання ЕП, викликаного наявністю досліджуваних об'єктів, при наближенні до границь розрахункової області.

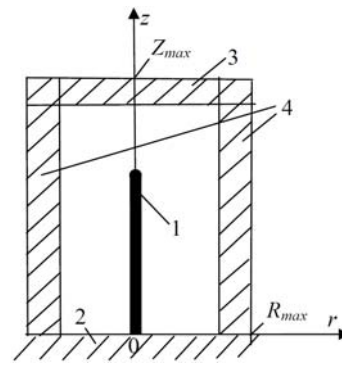


Рис. 3. Перетин $z = 0$ досліджуваної розрахункової системи, що містить провідний стрижень. 1 – стрижень; 2 – земля; 3, 4 – PML

Розподіл ЕП в PML не враховується в результатах розрахунку. Вважається, що електропровідність у такому шарі товщиною d є тензором, має різні значення в напрямках координатних осей Or , Oz і змінюється по глибині шару відповідно до поліноміального закону. Так, для PML, що перпендикулярний осі Or (див. 4 рис. 3), зміна r -ої – $\gamma_r^{PML}(r)$ і z -ої – $\gamma_z^{PML}(r)$ компонентів тензора електропровідності в напрямку осі Or записується у вигляді [6]:

$$\gamma_r^{PML}(r) = \gamma_0 \cdot k_r(r), \quad \gamma_z^{PML}(r) = \gamma_0 / k_r(r),$$

де $k_r(r) = 1 + (k_{max} - 1) \cdot (r/d)^m$, k_{max} – максимальна величина k_r на зовнішній границі PML-шару; m – показник ступеня; γ_0 – значення електропровідності середовища, суміжного із внутрішньою границею PML.

Значення компонентів тензора електропровідності в PML, перпендикулярному осі Oz (див. 3 рис. 3), мають вид:

$$\gamma_z^{PML}(z) = \gamma_0 \cdot k_z(z), \quad \gamma_r^{PML}(z) = \gamma_0 / k_z(z),$$

де $k_z(z) = 1 + (k_{max} - 1) \cdot (z/d)^m$.

Величини електропровідностей у зонах перетинання PML-шарів знаходять шляхом перемноження відповідних компонентів у кожному із шарів.

Умови на границях розрахункової області (див. рис. 3) вважалися таким: $\varphi=0$ на поверхні землі ($z=0$); $\partial\varphi/\partial n = 0$: при $R=0$ та при $r=R_{max}$ (на зовнішній границі розрахункової області). Для того, щоб врахувати, що на верхній границі розрахункової області за PML-шаром напруженість прикладеного ЕП дорівнює E_0 , при $z=Z_{max}$ використовувалася умова $\partial\varphi/\partial n = k_{max} \cdot E_0$ (докладніше див. [8]).

Порівняння з аналітичним рішенням для сфери в однорідному ЕП показало, що при використанні десяти шарів PML, що мають параметри $m = 5$, $k_{max} = 500 \cdot \gamma_0$, забезпечується відносна похибка розрахунку напруженостей і потенціалів ЕП не більше 3 %.

Вплив геометрії стрижнів з округленими вершинами на рівні максимальної напруженості ЕП. Для того щоб оцінити як впливає висота стрижнів на можливість розвитку від них коронного розряду, були розраховані розподіли ЕП при різній висоті стрижнів.

Попередньо були проведені розрахунки при послідовному збільшенні габаритів обмеженої PML розрахункової області в напрямках координатних осей, а також при зменшенні кроку розрахункової сітки. Вважалось, що рішення адекватно описує розподіл

ЕП, коли значення напруженостей і потенціалів переставали мінятися при послідовному дворазовому зменшенні кроку розрахункової сітки та збільшенні її габаритів. З аналізу отриманих даних були зроблені такі висновки: для того, щоб відносна похибка не перевищувала 3 %, розміри розрахункової області в радіальному напрямку повинні бути не менше, ніж висота стрижня (H), а у вертикальному – в 1.2 рази перевищувати H ; крок розрахункової сітки повинен бути не більше, ніж $R/10$ (де R – радіус округлення стрижня).

Розглянуто випадок, коли можна вважати, що до стрижня прикладене рівномірне ЕП. Згідно літературним даним (див. наприклад [12, с. 188 і далі]) при розрядах у системах «стрижень – площа» існує так званий критичний радіус стрижня. Він визначається з умови ідентичності характеру пробного в системах зі стрижнями, радіус яких менше критичного радіуса: $R \leq R_{cr}$, оскільки при виконанні даної умови пробивна напруга не залежить від величини R через наявність корони. Розглянуто випадок, коли величина радіуса стрижня дорівнює критичному радіусу – $R = R_{cr} = 0.1$ м [12].

На рис. 4 показані результати чисельного розрахунку залежності E_{max} – максимальних рівнів напруженості ЕП в околиці вершин провідних стрижнів, що знаходяться у зовнішньому однорідному полі напруженості E_0 (див. криву 1), від їхньої висоти H . Розрахунок проводився при таких параметрах розрахункової сітки: $\Delta_r = \Delta_z = R/10$, $Z_{max} = 1.2 \cdot H$, $R_{max} = H$, $H = var$.

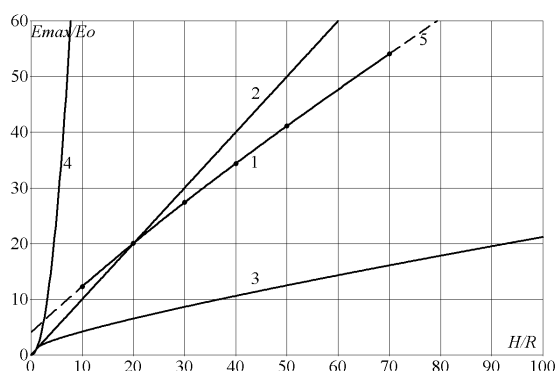


Рис. 4. Залежності максимальної напруженості ЕП в околиці провідного стрижня від його висоти H : 1 – чисельний розрахунок за допомогою описаного підходу; 2 – залежність $E_{max} = E_0 H/R$; 3, 4 – аналітичні рішення для витягнутого провідного еліпсоїда при відстані від вершини $l=0$ (3) і $l=R=0,1$ м (4); 5 – поліноміальна апроксимація кривої 1

На рис. 4 наведені також результати інженерних оцінок для E_{max} (криві 2 – 4). Крива 2 відповідає оцінці E_{max} у вигляді відношення потенціалу ЕП на висоті вершини заземленого стрижня до його радіуса (R):

$$E_{max} = E_0 \cdot H / R .$$

Криві 3 і 4 отримані в результаті використання аналітичного виразу для напруженості ЕП над еліпсоїдом на його осі (див. наприклад [13]) при відстані від його вершини $\Delta = R_{cr}$ (крива 3) і $\Delta = 0$ (крива 4). Як видно з порівняння кривих 1 – 4, значення $E_{max}^* = E_{max}/E_0$, отримані з урахуванням реальної форми стрижня (циліндр, вершина якого округлена),

займають проміжне положення відносно найменших рівнів (крива 3), які відповідають відстані від стрижня, рівної критичному радіусу R_{cr} , і найбільших рівнів, які відповідають точці на вершині еквівалентного еліпсоїда (крива 4). На рис. 4 крива 5, показана пунктиром, відповідає апроксимації кривої 1 поліномом.

Для діапазону зміни співвідношення висоти стрижня (H) до радіусу округлення його вершини (R) в межах: $10 < H/R < 70$ розрахована крива залежності $E^*(H/R)$ може бути апроксимована більш простою функцією, з якої для об'єкту, що знаходиться в зоні дії електричного поля напруженістю E_0 [В/м], можна знайти граничне значення для відношення радіусу округлення його вершини до його висоти, дотримання якого забезпечує пригнічення корони на даному об'єкті:

$$R/H > 0.7 / (3 \cdot 10^6 / E_0 - 6.08).$$

Висновки.

1. Запропонований метод урахування криволінійної границі розділу середовищ, заснований на використанні методу скінченних об'ємів, дозволяє розрахувати розподіл електричного поля на поверхні сфери та в її околиці з відносною похибкою, що не перевищує 3 %, при кроці розрахункової сітки не більшому, ніж $0.1 \cdot R$ (де R – радіус сфери).

2. За допомогою запропонованого методу врахування криволінійної границі розділу середовищ розраховані залежності максимальної напруженості електричного поля на вершинах стрижнів від співвідношення між їх діаметром та висотою.

3. Отримано вираз для оцінки того, яким радіусом слід округляти гострі кромки на об'єктах висотою H , що знаходяться в зоні дії ЕП напруженістю E_0 , для того, щоб на них не виникали коронні розряди.

4. Показано, що використання аналітичних рішень для провідного витягнутого еліпсоїда приводить до істотної похибки при знаходженні рівнів максимальної напруженості поблизу вершин стрижнів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Toal B., McMillen M., Murphy A., Atkinson R., Pollard R. Tuneable magneto-optical metamaterials based on photonic resonances in nickel nanorod arrays // Materials Research Express. – 2014. – №1. – pp. 1-11. doi: 10.1088/2053-1591/1/1/015801.
- Базелян Э.М., Ражанский И.М. Искровой разряд в воздухе. – Новосибирск: Наука, 1988. – 165 с.
- Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
- Popov E., Nevière M., Gralak B., Tayeb G. Staircase approximation validity for arbitrary-shaped gratings // Journal of the Optical Society of America A. – 2002. – vol.19. – №1. – pp. 33-42. doi: 10.1364/josaa.19.000033.
- Gjonaj E., Lau T., Schnepf S., Wolfheimer F., Weiland T. Accurate modeling of charged particle beams in linear accelerators // New Journal of Physics. – 2006. – №8. – pp. 1-21. doi: 10.1088/1367-2630/8/11/285.
- Taflove A., Hagness S. Computational electromagnetics: the finite difference time domain method. Boston – London: Artech House, 2000. – 852 p.
- Резинкина М.М. Расчет проникновения низкочастотного трехмерного электрического поля в неоднородные слабопроводящие объекты // Электричество. – 2003. – №8. – С. 50-55.
- Резинкина М.М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной

пространственной конфигурации // Журнал технической физики. – 2009. – Т.79. – №8. – С. 8-17.

9. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.

10. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. – М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. – 539 с.

11. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 150 с.

12. Cooray V. *Lightning Protection*. London: The Institution of Engineering and Technology, 2010. – 1036 p.

13. Кучинский Г.С., Кизеветтер В.Е., Пинталь Ю.С. Изоляция установок высокого напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 368 с.

REFERENCES

1. Toal B., McMillen M., Murphy A., Atkinson R., Pollard R. Tuneable magneto-optical metamaterials based on photonic resonances in nickel nanorod arrays. *Materials Research Express*, 2014, no.1, pp. 1-11. doi: 10.1088/2053-1591/1/1/015801.

2. Bazelian E.M., Razhanskii I.M. *Iskrovoi razriad v vozdukhie* [Spark discharge in air]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1988. 165 p. (Rus).

3. Samarskii A.A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 616 p. (Rus)

4. Popov E., Nevière M., Gralak B., Tayeb G. Staircase approximation validity for arbitrary-shaped gratings. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, vol.19, no.1, pp. 33-42. doi: 10.1364/josaa.19.000033.

5. Gjonaj E., Lau T., Schnepf S., Wolfheimer F., Weiland T. Accurate modeling of charged particle beams in linear accelerators. *New Journal of Physics*, 2006, no.8, pp. 1-21. doi: 10.1088/1367-2630/8/11/285.

6. Taflove A., Hagness S. *Computational electromagnetics: the finite difference time domain method*. Boston – London: Artech House, 2000. – 852 p.

7. Rezinkina M.M. The calculation of the penetration of a low-frequency three-dimensional electric field into heterogeneous weakly conducting objects. *Elektrichestvo – Electricity*, 2003, no.8, pp. 50-55. (Rus).

8. Rezinkina M.M. Numerical calculation of the magnetic field and magnetic moment of ferromagnetic bodies with a complex spatial configuration. *Technical Physics*, 2009, vol.54, no.8, pp. 1092-1101. doi: 10.1134/S1063784209080027.

9. Тамм И.Е. *Osnovy teorii elektrichestva* [Bases of the theory of electricity]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 504 p. (Rus).

10. Stretton Dzh.A. *Teoriia elektromagnetizma* [Theory of electromagnetism]. M.-L.: OGIЗ, Gostekhizdat Publ., 1948. 539 p. (Rus).

11. Patankar S. *Chislennyye metody resheniia zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti* [Numerical methods of solution of problems of heat exchange and dynamics of liquid]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 150 p. (Rus).

12. Cooray V. *Lightning Protection*. London: The Institution of Engineering and Technology, 2010. 1036p.

13. Kuchinskii G.S., Kizevetter V.E., Pintal' Iu.S. *Izoliatsiia ustanovok vysokogo napriazheniia* [Isolation of installations of high tension]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1987. 368 p. (Rus).

Поступила (received) 29.10.2015

Сокол Євген Іванович¹, д.т.н., проф., член-кор. НАНУ, Резинкіна Марина Михайлівна², д.т.н., Сосіна Олена Володимирівна¹, аспірант, Гриб Олег Герасимович¹, д.т.н., проф.,
¹Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, e-mail: elenasosina09@gmail.com
²Державна установа «Інститут технічних проблем магнетизму Національної академії наук України», 61106, Харків, вул. Індустріальна, 19, e-mail: marinar2@mail.ru

E.I. Sokol¹, M.M. Rezinkina², E.V. Sosina¹, O.G. Gryb¹
¹National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», 21, Frunze Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

²State Institution «Institute of Technical Problems of Magnetism of the NAS of Ukraine», 19, Industrialna Str., Kharkiv, 61106, Ukraine.

Numerical computation of electric fields in presence of curvilinear interface between conductive and non-conductive media.

Purpose. To elaborate a method of electric field numerical calculation in systems with curved boundaries between conductive and non-conductive mediums at final volume method usage and application of the rectangular grids. **Methodology.** At electric field calculation in quasi-stationary approximation, potential of the whole conductive object (rod) is constant. At final difference scheme writing, presence of the curved part of the boundary between conducting and non-conducting media has been taking into account as follows. It was supposed that curved section complements the closed loop on which integration of the solvable equation is done instead of a straight section which extends within a conducting medium. Usage of this approach allows taking into account square of the curved sections of the boundary and distance between surface of non-conductive medium and nearest nodes of the computational grid. **Results.** Dependence of the maximum electric field intensity on the height and radius of curvature peaks rods has been got with the help of calculations. As a result, a polynomial approximation for the analytical expression of the external electric field intensity, upon which application to the conductive object of a certain height and radius of curvature of its top, corona discharges will develop. References 13, figures 4.

Key words: rounded tops, curvilinear borders, finite volume method, calculated grid, electric field intensity.