УДК 621.3

В.В. Костюков, Л.Н. Канов

ВИЗУАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Запропонований метод візуального визначення коефіцієнтів характеристичних рівнянь перехідних процесів в лінійних електричних колах за допомогою часткових схем. Метод заснований на взаємному зв'язку між корінням алгебраїчного полінома і його коефіцієнтами. Метод проілюстрований на прикладі лінійного електричного кола третього порядку.

Предложен метод визуального определения коэффициентов характеристических уравнений переходных процессов в линейных электрических цепях с помощью частичных схем. Метод основан на взаимной связи между корнями алгебраического полинома и его коэффициентами. Метод проиллюстрирован на примере линейной электрической цепи третьего порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Повышенные требования к точности анализа переходных процессов в электротехнических системах оправдывают необходимость разработки и совершенствования их расчетов. При определенной идеализации электротехнических систем анализ переходных процессов удается свести к задаче составления и решения совокупности линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для решения подобных задач применяются классический и операторный методы, метод переменных состояния и др. [1, 2].

Наиболее наглядным является классический метод, главное содержание которого составляет формирование и решение линейного дифференциального уравнения относительно исследуемой переменной. В последнее время классический метод получил дальнейшее развитие в направлении числено – аналитического определения постоянных интегрирования [3], что еще больше расширило возможность его применения для исследования переходных процессов.

Вместе с тем одной из трудоемких особенностей классического метода является необходимость составления дифференциального, а, следовательно, и характеристического уравнения цепи. Непосредственное применение законов Кирхгофа и дифференциальных соотношений между напряжениями и токами в реактивных элементах для практически значимых схем громоздко. Чаще применяется формальная алгебраизация с заменой реактивных элементов их формальными сопротивлениями pL и $1/pC$. Корни характеристического уравнения совпадают с корнями определителя матрицы контурных сопротивлений или узловых проводимостей формальной схемы замещения [1, 2]. Однако в случае разветвленных цепей получение характеристического полинома также требует громоздких алгебраических преобразований.

В последнее время проводятся исследования по совершенствованию методики составления уравнений электрических цепей. В работах Курганова С.А. [4] предлагается метод схемных определителей, направленный на автоматизацию составления уравнений в стационарных режимах постоянного и синусоидального тока. Шакиров М.А. предложил формулы прямого решения цепей второго порядка [5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью статьи является дальнейшее развитие метода нахождения коэффициентов характеристических уравнений непосредственно по виду исследуемых линейных электрических цепей в направлении сокращения алгебраических преобразований.

МЕТОДИКА И МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Характеристическое уравнение линейной электрической цепи n-го порядка, соответствующее дифференциальному уравнению переходного процесса, имеет вид полинома степени n

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 \qquad (1)$$

с корнями p_1, p_2, …, p_n. Математически предлагаемый метод может быть обоснован наличием связи между корнями и коэффициентами a_1, a_2, …, a_n уравнения (1) [6]:

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n} p_i\,;\; a_2 = \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j\,;$$

$$a_3 = -\sum_{i,j,k=1}^{n} p_i p_j p_k\,;\, a_n \cdot (-1)^n = p_1 p_2 \ldots p_n\,;\; i < j < k\,.$$

Для целей исследования нормируем уравнение (1), разделив все его слагаемые на a_n, что соответствует появлению в дифференциальном уравнении слагаемого, представляющего исследуемую переменную с единичным коэффициентом. После нормировки уравнение (1) принимает вид

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + 1 = 0\,. \qquad (2)$$

В предлагаемом методе определяющим понятием является частичная схема электрической цепи [7, 8], которая содержит только один реактивный элемент из имеющихся в исходной цепи. Остальные реактивные элементы заменяются или коротким замыканием, или разрывом в зависимости от того, какой коэффициент уравнения (2) определяется. Резисторы, имеющиеся в цепи, остаются неизменными, а независимые источники энергии заменяются их внутренними сопротивлениями.

В каждой частичной схеме относительно реактивного элемента определяется эквивалентное активное сопротивление $r_{экв}$. В результате каждая частичная схема представляется элементарным контуром, включающим в себя два элемента: $r_{экв}$ и индуктивность L или емкость C, с постоянной времени $\tau = L/r_{экв}$ или $\tau = r_{экв}C$.

Для получения коэффициента b_1 при первой производной составляем частичные схемы относительно каждого реактивного элемента цепи. В этих схемах оставшиеся индуктивности закорачиваются, а емкости заменяются разрывом. Назовем такие состояния индуктивности и емкости естественными, имея в виду поведение указанных реактивных элементов в режиме постоянного тока. Состояние же реактивных элементов, соответствующее замене индуктивности разрывом, а емкости – коротким замыканием, назовем инверсным. Тогда сумма постоянных времени τ_i всех частичных схем при естественном состоянии всех не i-х реактивных элементов в i-й схеме оказывается равной коэффициенту b_1 в уравнении (2)

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \,. \qquad (3)$$

Сообразуясь с размерностью слагаемых уравнения (2), заключаем, что коэффициент b_2 при второй производной должен иметь размерность c^2. Поэтому b_2 должен представляться суммой попарных произведений постоянных времени частичных схем вида $\tau_i \cdot \tau_{ji}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$; $j = i+1, i+2,\ldots,n$. Постоянные с одним индексом τ_i такие же, что используются для определения b_1, т.е. определяются по частичной схеме для i-го реактивного элемента при естественном состоянии остальных не i-х реактивных элементов по (3).

Постоянная времени с двойным индексом ji определяется из частичной схемы, построенной для j-го реактивного элемента при инверсном состоянии i-го реактивного элемента и естественном состоянии остальных не i-х реактивных элементов. Таким образом, для коэффициента b_2 получаем формулу

$$b_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \tau_i \tau_{ji} \,. \qquad (4)$$

Аналогичные построения могут быть распространены и для получения остальных коэффициентов b_i уравнения (2).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для иллюстрации рассмотрим определение коэффициентов характеристического уравнения электрической цепи третьего порядка, изображенной на рис.1,а. Характеристическое уравнение, полученное для контроля на основе входного сопротивления в рассечке любой ветви в формальной схеме замещения, после нормировки имеет вид

$$\frac{L_1 L_3 C_2}{R_3} p^3 + \left((R_2+R_3)L_1 + R_2 L_3\right)\frac{C_2}{R_3} p^2 + \left(\frac{L_1+L_3}{R_3} + C_2 R_2\right) p + 1 = 0. \qquad (5)$$

Найдем коэффициент при первой производной, как сумму постоянных времени частичных схем (3). Частичная схема для индуктивности L_1 изображена на рис. 1,б, где емкость C_2 заменена разрывом, а индуктивность L_3 – коротким замыканием (естественные состояния). Постоянная времени $\tau_1 = L_1/R_3$. Частичная схема для емкости C_2 изображена на рис. 1,в, где индуктивности L_1 и L_3 заменены короткими замыканиями (естественные состояния). Постоянная времени $\tau_2 = C_2R_2$. Частичная схема для индуктивности L_3 изображена на рис. 1,г, где емкость C_2 заменена разрывом, а индуктивность L_1 – коротким замыканием (естественные состояния). Постоянная времени $\tau_3 = L_3/R_3$. Сумма $\tau_1+\tau_2+\tau_3$ по (3) дает коэффициент b_1 при первой производной $b_1=C_2R_2+(L_1+L_3)/R_3$.

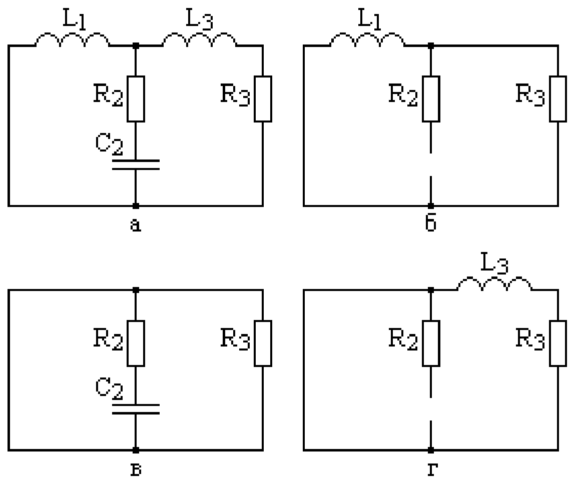

Рис. 1. Электрическая цепь третьего порядка:
а) исходная схема; б) частичная схема для τ_1;
в) частичная схема для τ_2; г) частичная схема для τ_3

Найдем коэффициент при второй производной как сумму попарных произведений постоянных времени частичных схем по (4)

$$b_2 = \tau_1 \cdot \tau_{21} + \tau_1 \cdot \tau_{31} + \tau_2 \cdot \tau_{32} \,. \qquad (6)$$

Выше уже найдены постоянные времени τ_1, τ_2. Построим частичные схемы для постоянных с двойными индексами. Для определения τ_{21} частичная схема по емкости C_2 изображена на рис. 2,а, где индуктивность L_1 заменена разрывом (инверсное состояние), а индуктивность L_3 – коротким замыканием (естественное состояние). Постоянная времени $\tau_{21} = C_2(R_2+R_3)$.

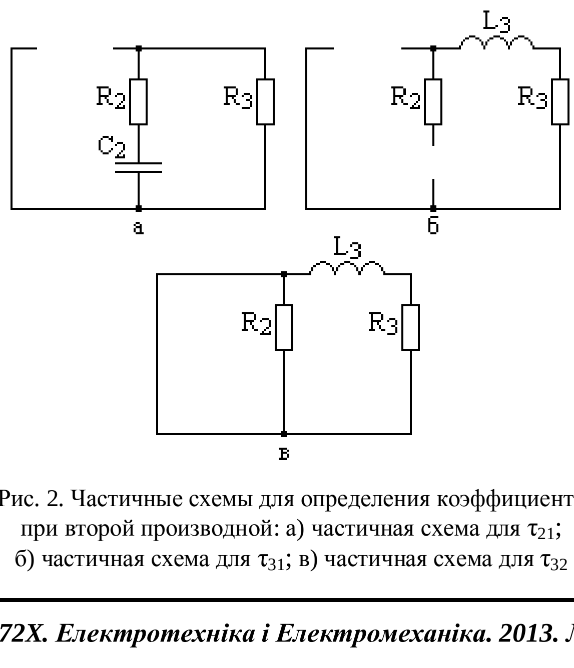

Рис. 2. Частичные схемы для определения коэффициента при второй производной: а) частичная схема для τ_{21};
б) частичная схема для τ_{31}; в) частичная схема для τ_{32}

Для определения τ_{31} частичная схема по индуктивности L_3 изображена на рис. 2,б, где емкость C_2 заменена разрывом (естественное состояние), и индуктивность L_1 – также разрывом (инверсное состояние). Постоянная времени $\tau_{31} = L_3/\infty = 0$.

Для определения τ_{32} частичная схема по индуктивности L_3 изображена на рис. 2,в, где индуктивность L_1 заменена коротким замыканием (естественное состояние) и емкость C_2 – также коротким замыканием (инверсное состояние). Постоянная времени $\tau_{32} = L_3/R_3$.

Поэтому коэффициент при второй производной определяется выражением (6)

$$b_2 = \frac{L_1}{R_3}(R_2 + R_3)C_2 + \frac{L_1}{R_3} \cdot 0 + R_2 C_2 \frac{L_3}{R_3},$$

что совпадает с коэффициентом при второй производной в (5).

ВЫВОДЫ

Предложенный метод позволяет находить все или отдельные коэффициенты характеристического уравнения, причем они приобретают определенный физический смысл. Определение коэффициентов предложенным методом исключает громоздкие алгебраические преобразования и заменяет их определением эквивалентных сопротивлений в элементарных схемах постоянного тока. Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка методики получения коэффициентов при более высоких производных и математическое и физическое обоснование метода на основе взаимной связи между корнями алгебраического полинома и его коэффициентами, а также на теории графов электрических цепей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи / Л.А.Бессонов. – М.: "Юрайт", 2012. – 701 с.
2. Демирчян К.С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей / К.С. Демирчян, П.А. Бутырин. – М.: Высшая школа, 1988. – 335 с.
3. Костюков В.В. Численно-аналитическое моделирование переходных процессов в электротехнических системах / В.В. Костюков, Л.Н. Канов // Електротехніка та електроенергетика. – 2007. – № 1. – С. 52-56.
4. Курганов С.А. Неявный принцип наложения в линейных электрических цепях / С.А. Курганов, В.В. Филаретов // Электричество. – 2005. – № 1. – С. 32-43.
5. Практикум по ТОЭ. Часть 2 / М.А. Шакиров, Р.П. Киятин, В.С. Лопатин, В.Н. Воронин [и др.]. – С-Пб.: Изд-во С-Пб ГТУ, 2000. – 152 с.
6. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
7. Костюков В.В. Схемное получение коэффициентов характеристического уравнения в электрических цепях / В.В. Костюков // Проблемы повышения эффективности электромеханических преобразователей в электроэнергетических системах: Матер. междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 17-20 сентября 2012 г. – Севастополь: изд-во СевНТУ. – 2012. – С. 183-184.
8. Костюков В.В. Метод визуального построения характеристических уравнений линейных электрических цепей / В.В. Костюков // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр. – Севастополь, 2013. – Вып. 139. – С. 91-94.

Bibliography (transliterated): ***1.*** Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy `elektrotehniki. Linejnye `elektricheskie cepi / L.A.Bessonov. - M.: "Yurajt", 2012. - 701 s. ***2.*** Demirchyan K.S. Modelirovanie i mashinnyj raschet `elektricheskih cepej / K.S. Demirchyan, P.A. Butyrin. - M.: Vysshaya shkola, 1988. - 335 s. ***3.*** Kostyukov V.V. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie perehodnyh processov v `elektrotehnicheskih sistemah / V.V. Kostyukov, L.N. Kanov // Elektrotehnika ta elektroenergetika. - 2007. - № 1. - S. 52-56. ***4.*** Kurganov S.A. Neyavnyj princip nalozheniya v linejnyh `elektricheskih cepyah / S.A. Kurganov, V.V. Filaretov // `Elektrichestvo. - 2005. - № 1. - S. 32-43. ***5.*** Praktikum po TO`E. Chast' 2 / M.A. Shakirov, R.P. Kiyatin, V.S. Lopatin, V.N. Voronin [i dr.]. - S-Pb.: Izd-vo S-Pb GTU, 2000. - 152 s. ***6.*** Korn G. Spravochnik po matematike / G. Korn, T. Korn. - M.: Nauka, 1968. - 720 s. ***7.*** Kostyukov V.V. Shemnoe poluchenie ko`efficientov harakteristicheskogo uravneniya v `elektricheskih cepyah / V.V. Kostyukov // Problemy povysheniya `effektivnosti `elektromehanicheskih preobrazovatelej v `elektro`energeticheskih sistemah: Mater. mezhdunar. nauch.-tehn. konf., Sevastopol', 17-20 sentyabrya 2012 g. - Sevastopol': izd-vo SevNTU. - 2012. - S. 183-184. ***8.*** Kostyukov V.V. Metod vizual'nogo postroeniya harakteristicheskih uravnenij linejnyh `elektricheskih cepej / V.V. Kostyukov // Vestnik SevNTU. Ser. Mehanika, `energetika, `ekologiya: Sb. nauch. tr. - Sevastopol', 2013. - Vyp. 139. - S. 91-94.

Поступила (received) 01.07.2013

Костюков Валентин Викторович, к.т.н., доц.,
Канов Лев Николаевич, к.т.н., доц.
Севастопольский национальный технический университет
кафедра судовых и промышленных электромеханических систем,
99053, Севастополь, ул. Университетская, 33,
тел/phone: +38 0692 435272, e-mail: lnkanov48@mail.ru

Kostyukov V.V., Kanov L.N.
Sevastopol National Technical University
33, University Str., Sevastopol, Crimea, 99053, Ukraine

Visual construction of characteristic equations of linear electric circuits.

A visual identification method with application of partial circuits is developed for characteristic equation coefficients of transients in linear electric circuits. The method is based on interrelationship between the roots of algebraic polynomial and its coefficients. The method is illustrated with an example of a third-order linear electric circuit.

Key words – **a linear electric circuit, characteristic equation, partial circuit, inductance, capacity, time constant.**