

## МЕТОД ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИГНАТУР МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

*Розглядаються теоретичні аспекти способу експериментального визначення залишкового та індуктивного магнітних моментів технічного об'єкта. В якості початкових даних використано сигнатури магнітної індукції технічного об'єкта, які отримані при його лінійному переміщенні поблизу пари трьохкомпонентних датчиків. Пропонується спосіб інтегрування магнітних сигнатур, заснований на просторовому гармонічному аналізі магнітного поля, представлено двадцятьма чотирма мультипольними коефіцієнтами.*

*Рассматриваются теоретические аспекты способа экспериментального определения индуктивного и остаточного магнитных моментов технического объекта. В качестве исходных данных использованы сигнатуры магнитной индукции технического объекта, полученные при его линейном перемещении вблизи пары трехкомпонентных датчиков. Предлагается способ интегрирования магнитных сигнатур, основанный на пространственном гармоническом анализе магнитного поля, представленного двадцатью четырьмя мультипольными коэффициентами.*

### ВВЕДЕНИЕ

Для различных технических объектов (ТО) величина магнитного момента является их паспортной характеристикой, что обуславливает необходимость ее экспериментального определения. Применение для этих целей магнитометрических методов основано на измерении различных характеристик внешнего магнитного поля ТО: магнитной индукции, магнитного потока, либо градиента магнитной индукции. При этом магнитный момент (ММ) как магнитную характеристику источника поля получают математической обработкой данных измерений характеристик магнитного поля (МП) и геометрических параметров измерительной системы [1-3]. Сложность проведения таких измерений и необходимость использования измерительных систем на специализированных магнитометрических стендах обуславливается существенным отличием распределения МП вблизи большинства ТО от распределения магнитного поля магнитного диполя. Тем самым задача измерения ММ сводится к задаче выделения и определения вклада дипольной составляющей из внешнего МП ТО. С этой целью внешнее МП ТО моделируют таким образом, чтобы используемые в модели параметры, характеризующие дипольный магнитный момент, могли быть выделены и определены с помощью специализированной измерительной системы и последующей математической обработкой полученных результатов.

Подходы, использованные при построении модели магнитного поля ТО и создании измерительных систем, определяют методическую погрешность измерения ММ. Наиболее жесткие требования по точности определения ММ предъявляются к магнитным моментам комплектов космических аппаратов для межпланетных исследований и геофизических спутников Земли. Это вызвано задачей [3] обеспечения их "магнитной частоты" – исключения влияния МП, создаваемого космическим аппаратом, на прецизионные бортовые магнитоизмерительные системы. Практика решения таких задач требует постоянного повышения точности измерения ММ, как величины, характеризующей интенсивность источника МП.

Целью работы является разработка метода экспериментального определения индуктивного и остаточного магнитных моментов ТО на основе интегральной обработки сигнатур проекций магнитной индукции.

### ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Примем значение относительной магнитной проницаемости воздуха равным единице, тогда для магнитной индукции в воздухе, упрощается связь с напряженностью магнитного поля [4] и его скалярным потенциалом согласно выражению:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\mu_0 \text{grad}U. \quad (1)$$

Будем использовать самую общую модель внешнего магнитного поля технического объекта, скалярный потенциал  $U$  которого описывается суммой мультипольных магнитных моментов [5] в виде:

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} g_n^m \cos m\varphi \\ h_n^m \sin m\varphi \end{matrix} \right\}, \quad (2)$$

где  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты точки наблюдения магнитного поля,  $P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра,  $g_n^m, h_n^m$  – мультипольные коэффициенты, характеризующие мультипольный магнитный момент порядка  $n$ .

Сравнивая (2) с известным выражением [4] скалярного потенциала магнитного момента  $M$  магнитного диполя:

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right), \quad (3)$$

получим простые соотношения для дипольных коэффициентов из (1):

$$g_1^1 = M_x, \quad h_1^1 = M_y, \quad g_1^0 = M_z. \quad (4)$$

Воспользуемся свойством быстрого убывания при удалении от источника вкладов в сумму из (2) от мультипольных магнитных моментов старших порядков и ограничим количество рассматриваемых в модели мультипольных магнитных моментов четвертым порядком ( $n \leq 4$ ).

## ИЗМЕРЕНИЕ СИГНАТУР МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Предлагаемый способ определения магнитного момента основан на измерении сигнатур трех проекций магнитной индукции в двух точках, равноудаленных на расстояние  $R$  от пути перемещения ТО (см. рис. 1, 2). При этом трехкомпонентные "точечные" датчики магнитной индукции располагают в плоскости XOZ подвижной системы координат, связанной с центром ТО, перемещаемого в положительном направлении оси аппликат.

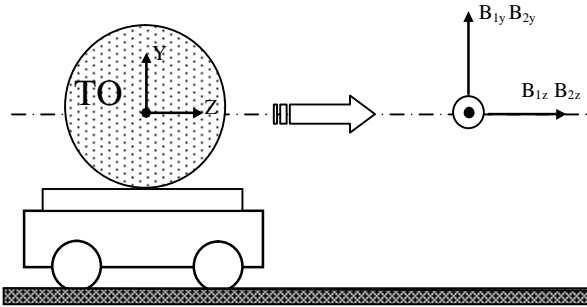


Рис. 1. Схема измерения сигнатур трех проекций магнитной индукции в двух симметричных относительно пути перемещения точках (вид с боку пути перемещения)

Для такого выбора системы отсчета сферические координаты точек 1 и 2 расположения датчиков связаны следующими выражениями:

$$\begin{aligned} r_1 = r_2 = r &= \sqrt{z^2 + (R)^2}; \\ \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos \theta &= \frac{z}{r}; \\ \varphi_1 = 0; \varphi_2 &= \pi \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно схеме измерений, исходными данными о магнитном поле объекта являются шесть сигнатур проекций магнитной индукции, полученные в точках 1 и 2 при перемещении ТО по оси аппликат на интервале  $z \in [z_{\text{нач}}, z_{\text{кон}}]$ .

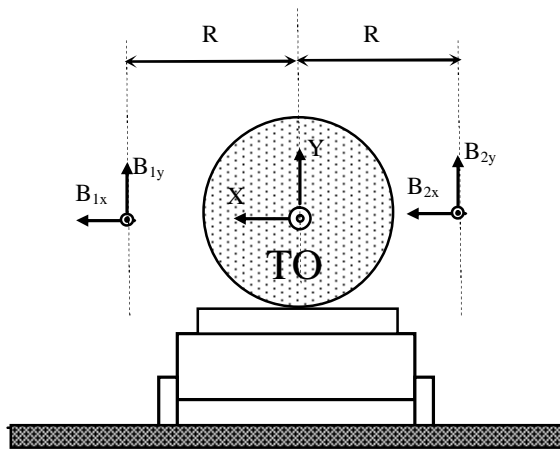


Рис. 2. Схема измерения сигнатур трех проекций магнитной индукции в двух симметричных относительно пути перемещения точках (вид со стороны датчиков)

Используя (1) и известные [4] формулы преобразования декартовых проекций магнитной индукции, получим сигнатуры сферических проекций напряженности  $H(z)$  магнитного поля (см. рис. 2) в виде набора данных на основе выражений:

$$\begin{cases} H_r(z) = \frac{1}{\mu_0} \left[ B_x(z) \sin \theta \cos \varphi + \right. \\ \left. + B_y(z) \sin \theta \sin \varphi + B_z(z) \cos \theta \right] \\ H_\varphi(z) = \frac{1}{\mu_0} \left[ -B_x(z) \sin \varphi + B_y(z) \cos \varphi \right] \end{cases} \quad (6)$$

Для последующего интегрирования  $H(z)$  зависимостей сферических проекций напряженности магнитного поля, полученных в (6), преобразуем их на основании (5) в  $H(\theta)$  для интервала  $\theta$  от 0 до  $\pi$  в которых  $H(0)=H(\pi)=0$ , интерполируя (рис. 3) недостающие на краях значения поля функциональной зависимостью  $k[\sin(\theta)]^3$ , аналогично процедуре, описанной в [6].

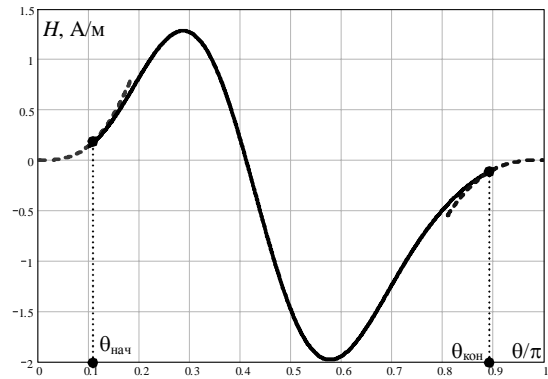


Рис. 3. Интерполяция начала и конца проходной характеристики  $H_r(\theta)$

Таким образом, в результате предварительной математической обработки измеренных сигнатур магнитной индукции мы получили функциональные зависимости напряженности магнитного поля от угловой координаты  $\theta$ , которые используем для нахождения дипольных коэффициентов из (4).

## РАСЧЕТ ДИПОЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим способ интегральной обработки сигнатур сферических проекций  $H(\theta)$  напряженности магнитного поля, экспериментально полученных и интерполированных на интервале  $\theta \in [0, \pi]$ . В каждой из точек измерений 1 и 2 согласно (2) будут измерены суммарные значения магнитного поля, состоящего из вкладов от всех двадцати четырех мультипольных коэффициентов, используемых нами в модели МП ТО. Для уменьшения количества членов ряда (2), вносящих свой вклад в сигнатуру МП произведем суммирование и вычитание соответствующих проекций  $H(\theta)$  полученных в точках 1 и 2, согласно выражениям:

$$\begin{aligned} H_{1r}(\theta) + H_{2r}(\theta) &= \frac{4(\sin \theta)^3}{R^3} P_1 (\cos \theta) g_1^0 + \\ &+ \frac{6(\sin \theta)^4}{R^4} \left( P_2 (\cos \theta) g_2^0 + P_2^2 (\cos \theta) g_2^2 \right) + \\ &+ \frac{8(\sin \theta)^5}{R^5} \left( P_3 (\cos \theta) g_3^0 + P_3^2 (\cos \theta) g_3^2 \right) + \\ &+ \frac{10(\sin \theta)^6}{R^6} \left( P_4 (\cos \theta) g_4^0 + \right. \\ &\left. + P_4^2 (\cos \theta) g_4^2 + P_4^4 (\cos \theta) g_4^4 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
H_{1r}(\theta) - H_{2r}(\theta) &= \frac{4(\sin \theta)^3}{R^3} P_1^1(\cos \theta) g_1^1 + \\
&+ \frac{6(\sin \theta)^4}{R^4} P_2^1(\cos \theta) g_2^1 + \\
&+ \frac{8(\sin \theta)^5}{R^5} (P_3^1(\cos \theta) g_3^1 + P_3^3(\cos \theta) g_3^3) + \\
&+ \frac{10(\sin \theta)^6}{R^6} (P_4^1(\cos \theta) g_4^1 + P_4^3(\cos \theta) g_4^3)
\end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
H_{1\varphi}(\theta) - H_{2\varphi}(\theta) &= -\frac{2(\sin \theta)^2}{R^3} P_1^1(\cos \theta) h_1^1 - \\
&- \frac{2(\sin \theta)^3}{R^4} P_2^1(\cos \theta) h_2^1 - \frac{2(\sin \theta)^4}{R^5} P_3^1(\cos \theta) h_3^1 - \\
&- \frac{6(\sin \theta)^4}{R^5} P_3^3(\cos \theta) h_3^3 - \frac{2(\sin \theta)^5}{R^6} P_4^1(\cos \theta) h_4^1 - \\
&- \frac{6(\sin \theta)^5}{R^6} P_4^3(\cos \theta) h_4^3
\end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (6-8), суммирование сигнатур, полученных в точках 1 и 2, приводит к исключению мультипольных коэффициентов с нечетными значениями  $m$ , а соответствующая разность проходных характеристик не содержит вклады от мультипольных коэффициентов с четными  $m$ . Это позволяет воспользоваться свойством частичной ортогональности [7-9] произведений полиномов Лежандра и функции от  $\theta$  на интервале  $\theta \in [0, \pi]$ . Для чего обозначим через  $G_1, G_2, G_3$  значения интегралов от произведения суммарной сигнатуры (6) для проекций  $H(\theta)$ , полученных в точках 1 и 2, и предлагаемых селектирующих функций:

$$\frac{P_1^0(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2}; \quad \frac{P_3^0(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2}; \quad \frac{P_3^2(\cos \theta)}{(\sin \theta)^4}. \quad (9)$$

Тем самым выделим вклады мультипольных  $g$ -коэффициентов с нечетными значениями  $n$  и четными значениями  $m$ .

Тогда три интеграла  $G_1, G_2, G_3$  примут вид:

$$G_1 = \int_0^\pi (H_{1r}(\theta) + H_{2r}(\theta)) \frac{P_1^0(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2} d\theta, \quad (10)$$

$$G_2 = \int_0^\pi (H_{1r}(\theta) + H_{2r}(\theta)) \frac{P_3^0(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2} d\theta, \quad (11)$$

$$G_3 = \int_0^\pi (H_{1r}(\theta) + H_{2r}(\theta)) \frac{P_3^2(\cos \theta)}{(\sin \theta)^4} d\theta. \quad (12)$$

Произведя расчет (10-12) для нахождения коэффициента  $g_1$  получим выражение:

$$g_1^0 = \frac{3R^3}{88} \left( -5G_1 + 9G_2 - \frac{16}{15}G_3 \right). \quad (13)$$

Поступим аналогичным образом для нахождения коэффициента  $g_1^1$ . Для чего найдем значения интегралов

$G_1^1, G_2^1, G_3^1$  от произведения разностной сигнатуры (7) для проекций  $H(\theta)$ , полученных в точках 1 и 2, и предлагаемых селектирующих функций:

$$\frac{P_1^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)^4}; \quad \frac{P_3^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2}; \quad \frac{P_3^3(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2}. \quad (14)$$

При этом будут выделены вклады мультипольных  $g$ -коэффициентов с нечетными значениями  $n$  и нечетными значениями  $m$ .

Получим три выражения для  $G_1^1, G_2^1, G_3^1$ :

$$G_1^1 = \int_0^\pi (H_{1r}(\theta) - H_{2r}(\theta)) \frac{P_1^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)^4} d\theta, \quad (15)$$

$$G_2^1 = \int_0^\pi (H_{1r}(\theta) - H_{2r}(\theta)) \frac{P_3^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2} d\theta, \quad (16)$$

$$G_3^1 = \int_0^\pi (H_{1r}(\theta) - H_{2r}(\theta)) \frac{P_3^3(\cos \theta)}{(\sin \theta)^2} d\theta. \quad (17)$$

Найдя значения  $G_1^1, G_2^1, G_3^1$  в (15-17), получим выражение для  $g_1^1$ :

$$g_1^1 = \frac{5R^3}{32} \left( -12G_1^1 + 7G_2^1 - \frac{7}{5}G_3^1 \right). \quad (18)$$

Для нахождения коэффициента  $h_1^1$  воспользуемся разностной сигнатурой (8) и предлагаемыми селектирующими функциями:

$$\frac{P_1^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)^3}; \quad \frac{P_3^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)}; \quad \frac{P_3^3(\cos \theta)}{(\sin \theta)}. \quad (19)$$

Интегрирование оставит в результатах вклады от мультипольных  $h$ -коэффициентов с нечетными значениями  $n$  и нечетными значениями  $m$ .

При этом тройка интегралов  $I_1, I_2, I_3$  будет иметь вид:

$$I_1 = \int_0^\pi (H_{1\varphi}(\theta) - H_{2\varphi}(\theta)) \frac{P_1^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)^3} d\theta, \quad (20)$$

$$I_2 = \int_0^\pi (H_{1\varphi}(\theta) - H_{2\varphi}(\theta)) \frac{P_3^1(\cos \theta)}{(\sin \theta)} d\theta, \quad (21)$$

$$I_3 = \int_0^\pi (H_{1\varphi}(\theta) - H_{2\varphi}(\theta)) \frac{P_3^3(\cos \theta)}{(\sin \theta)} d\theta. \quad (22)$$

Для расчета значения коэффициента  $h_1^1$  воспользуемся представлением:

$$h_1^1 = \frac{R^3}{16} (60I_1 - 35I_2 + 7I_3). \quad (23)$$

Таким образом, предложенный способ получения и интегрирования шести проходных характеристик магнитной индукции позволяет определять по (13), (14) и (23) все три дипольных коэффициента в (4) из двадцати четырех мультипольных коэффициентов в (2), описывающих МП ТО с помощью модели, для которой  $n \leq 4$ .

Следует иметь в виду, что найденные таким способом проекции магнитного диполя соответствуют суммарному (индуктивному и остаточному) магнитному моменту ТО, если измерения сигнатур магнит-

ной индукции проводились в ненулевом внешнем магнитном поле (например, в магнитном поле Земли).

Для разделения вкладов индуктивного и остаточного магнитных моментов необходимо произвести дополнительные измерения сигнатур магнитной индукции ТО в нулевом внешнем магнитном поле, что требует использования специализированного магнитоизмерительного стенда. После чего разность результатов для дипольного момента при наличии внешнего поля с соответствующими проекциями остаточного магнитного момента, непосредственно получаемого в нулевом поле, даст значения индуктивного магнитного момента.

Альтернативным подходом, не требующим использования магнитоизмерительного стенда, может быть применение рекомендаций стандарта [1]. Согласно стандарту Европейского космического агентства индуктивный и остаточный магнитные моменты ТО могут быть получены дополнительными измерениями в том же внешнем магнитном поле, но при переориентированном на 180° градусов положении объекта. Переориентацию производят таким образом, чтобы для каждой из пространственных осей объекта производилась пара измерений: при сонаправленном положении и противоположном. Тогда три декартовы проекции индуктивного магнитного момента находят как полусуммы результатов измерений соответствующих проекций, а проекции остаточного магнитного момента находят как их полуразность.

## ВЫВОДЫ

Проверка предлагаемого метода с помощью компьютерного моделирования показала целесообразность выбора значений для расстояния R от пути перемещения до точек установки датчиков магнитной индукции в пределах одного габаритного размера исследуемого объекта. При этом удлинение пути перемещения до значений более десяти R не приводит к заметному повышению точности расчета магнитного момента технического объекта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ECSS-E-HB-20-07A "Space engineering: Electromagnetic compatibility handbook" ESA-ESTEC. Requirements & Standards Division. Noordwijk, The Netherlands. – 2012. – 28 p.
2. Kildishev A.V., Volokhov S.A., Saltykov J.D. Measurement of the Spacecraft Main Magnetic Parameters // IEEE SYSTEMS READINESS TECHNOLOGY CONFERENCE (AUTOTESTCON'97). – Anaheim (California). – 1997. – P. 669-675.
3. Розов В., Гетьман А., Петров С., Ерисов А., Меланченко А., Хорошилов В., Шмидт И. Магнетизм космических аппаратов // Техническая электродинамика. – 2010. – Тематический выпуск. Ч.2. Проблеми сучасної електротехніки. – С. 144-147.

4. Smythe W. Static and Dynamic Electricity., Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.
5. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 774 с.
6. Гетьман А.В. Определение пространственных гармоник магнитного поля вблизи поверхности технического объекта // Электричество. – 2005. – №1. – С. 55-60.
7. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Наука, 1952. – 476 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 800 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. ECSS-E-HB-20-07A "Space engineering: Electromagnetic compatibility handbook" ESA-ESTEC. Requirements & Standards Division. Noordwijk, The Netherlands. – 2012. – 28 p. 2. Kildishev A.V., Volokhov S.A., Saltykov J.D. Measurement of the Spacecraft Main Magnetic Parameters // IEEE SYSTEMS READINESS TECHNOLOGY CONFERENCE (AUTOTESTCON'97). – Anaheim (California). – 1997. – P. 669-675. 3. Rozov V., Getman A., Petrov S., Ericov A., Melanchenko A., Horoshilov V., Shmidt I. Magnetizm kosmicheskikh apparatov // Tehnicheskaya elektrodinamika. – 2010. – Tematicheskii vypusk. Ch.2. Problemy suchnoi elektrotehniki. – S. 144-147. 4. Smythe W. Static and Dynamic Electricity, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p. 5. Shimoni K. Teoreticheskaja elektrotehnika. – M.: Mir, 1964. – 774 s. 6. Getman A.V. Opredelenie prostranstvennykh harmonik magnitnogo polia vblizi poverhnosti tehniceskogo obekta // Elektrichestvo. – 2005. – № 1. – S. 55-60. 7. Gobson E.V. Teoria sfericheskikh i ellipsoidalnykh funkciy. – M.: Nauka, 1952. – 476 s. 8. Gradshtein I.S., Ryjik I.M. Tablicy integralov summ, riadov i proizvedeniy. – M.: Fizmatgiz, 1963. – 1100 s. 9. Prudnikov A.P. Integraly i riady. Dopolnitelnye glavy. – M.: Nayka, Glavnaiya redakcia fiziko-matematicheskoi literatury, 1986. – 800 s.

*Поступила (received) 20.06.2013*

*Гетьман Андрей Владимирович, к.т.н., с.н.с.*

Научно-технологический центр магнетизма технических объектов Национальной академии наук Украины, 61106, Харьков, ул. Индустриальная, 19, тел/phone: +38 0572 991175, e-mail: ntcmt@ukrpost.ua

*Getman A.V.*

Science and Technology Center of Magnetism of Technical Objects of National Academy of Sciences of Ukraine 19, Industrialna Str., Kharkiv-106, 61106, Ukraine

### **An experimental magnetic moment determination method based on spatial harmonic analysis of magnetic flux density signatures.**

Theoretical aspects of an experimental determination method for residual and inductive magnetic moments of a technical object are considered. As input data, the technical object magnetic induction signatures obtained under its linear movement near a pair of three-component sensors are used. A magnetic signature integration technique based on spatial harmonic analysis of the magnetic field represented by twenty-four multipole coefficients is introduced.

**Key words – magnetic field, spatial harmonic analysis, magnetic moment, magnetic signature.**